

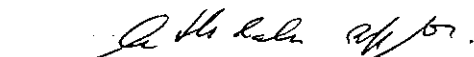
ANÁLISE NÃO LINEAR E SIMULAÇÕES DAS OSCILAÇÕES DE
SUB-VÃO EM LINHAS DE TRANSMISSÃO

Agamenon Rodrigues Eufrásio Oliveira


TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JA-
NEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO
GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS (D.Sc.).

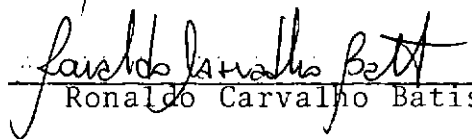
Aprovada por:


William Mittias Mansour


Arthur Palmeira Ripper Neto


Victor Prodonoff


Abimael Fernando Dourado Loula


Ronaldo Carvalho Batista

A

Etelvira

Wagner

Juliana

AGRADECIMENTOS

Ao Professor William M. Mansour a quem devo além das idéias fundamentais do trabalho, uma orientação segura e minuciosa.

Ao CNPq e CAPES pelo apoio a pesquisa e a pós-graduação no Brasil.

Ao CEPEL pelo apoio financeiro no início deste trabalho.

Aos professores Arthur Palmeira Ripper Neto e Lîu Hsu pelas valiosas sugestões.

A Helena Santos de Oliveira pelo excelente trabalho de datilografia.

A Clarissa Beletti pela confecção das figuras.

SUMÁRIO

A maioria das pesquisas publicadas, usa uma versão linearizada do modelo matemático, que descreve a dinâmica das oscilações de sub-vão. O problema é sempre reduzido a um problema de "flütter" e qualquer definição sobre as amplitudes dos ciclos limite e sua estabilidade é impossível, através deste enfoque. O presente trabalho, ataca o problema, usando uma análise não linear.

Os coeficientes de sustentação e de arraste de um cilindro, dentro da esteira de um outro, são representados por modelos matemáticos, a partir de resultados experimentais obtidos em tunel de vento. Os coeficientes do modelo são escolhidos de forma a fornecerem a melhor representação dos dados, numa região de interesse.

As partes lineares das expressões para C_L e C_D , foram usadas para conduzir uma investigação preliminar a fim de determinar as regiões de estabilidade e as velocidades críticas do vento. O modelo utilizado, é não linear e uma análise não linear foi adotada, empregando o método das múltiplas escalas de tempo e a aproximação assintótica de Krylov e Bogoliubov.

As expressões para C_L e C_D foram posteriormente representadas por polinômios de segunda ordem. Eles foram usados, para estudar os ciclos limite e determinar sua estabilidade. Um balanço harmônico sobre o modelo matemático, também provou ser adequado a esta investigação.

Algumas simulações, digitais e analógicas foram tentadas, para verificar as previsões analíticas e uma boa concordância foi encontrada.

ABSTRACT

The majority of the published research used a linearized version of the mathematical model describing the dynamics of sub-span oscillations. The problem was always reduced to a flü^uter-problem. A definition for the amplitude of the limit cycle and its stability were not possible using this linearized approach. This investigation attacks the problem using nonlinear analysis.

The lift and drag coefficients of a cylinder in the wake of another are represented by mathematical models using experimental data which are available from wind-tunnel tests. The coefficients of the model are chosen to give the best representation of the data in the range of interest.

The linear parts of the expressions for C_L and C_D were then used to conduct a preliminary investigation to determine the stability zones as well as the critical wind velocities. The used model was nonlinear and a nonlinear analysis was adopted using multiple-time scale and the asymptotic approximations of Kryloff and Bogoliuboff.

The expressions for C_L and C_D were next represented by second order polynomials. These were used to study the Limit cycles and to determine their stability. A harmonic-balance proved to be adequate for this investigation.

Digital and analog simulation were tried to verify the mathematical predictions. The agreement in trends was confirmed.

INDICE

I	- INTRODUÇÃO	1
	1.1 - O Problema do Movimento do Condutor	1
	1.2 - Oscilações em Linhas de Transmissão	2
	1.3 - Situação Atual da Pesquisa sobre as Oscilações de Sub-Vão	9
	1.4 - Revisão de Estudos Analíticos Publicados ...	10
	1.5 - Tipos de Experimentação em Tunel de Vento ..	15
	1.6 - Objetivos da Tese	20
	1.7 - Comentários	21
II	- MODELO NÃO LINEAR SIMPLIFICADO	23
	2.1 - Modelo Matemático	23
	2.2 - Coeficientes de Sustentação e de Arraste :...	27
	2.3 - Modelo Não Linear Simplificado	29
	2.4 - Método das Múltiplas Escalas de Tempo	31
	2.5 - Contornos de Estabilidade para o Caso Não Resonante	35
	2.6 - Oscilações Auto-Sustentáveis para o Caso Não Ressonante	38
	2.7 - Caso Ressonante ($\Omega_2 \approx 2 \Omega_1$)	44
	2.8 - Estabilidade dos Ciclos-Limite para o Caso Ressonante	48
	2.9 - Método Alternativo para a Solução do Modelo Não Linear Simplificado	51
	2.10- Comentários	58
III	- CICLOS-LIMITE	60
	3.1 - Modelo com Não Linearidade Cúbica	60
	3.2 - Aproximação Assintótica de Krylov e Bogoliubov	63
	3.3 - Amplitudes dos Ciclos-Limite	67
	3.4 - Estabilidade dos Ciclos Limite	70

3.5 - Método do Balanço Harmônico	72
3.6 - Ciclos-Limite	76
3.7 - Análise da Estabilidade dos Ciclos-Limite ..	78
3.8 - Comentários	81
IV - SIMULAÇÃO ANALÓGICA E DIGITAL	84
4.1 - Simulação Analógica	84
4.2 - Ciclos-Limite por Integração Numérica	100
4.3 - Comentários	106
V - CONCLUSÕES	107
5.1 - Considerações Sobre o Modelo Matemático	107
5.2 - Limitações do Modelo Não Linear Simplificado	108
5.3 - As Amplitudes dos Ciclos-Limite	109
5.4 - Os Métodos Analíticos Empregados	111
5.5 - Métodos Alternativos de Solução	112
5.6 - Sugestões para o Prosseguimento da Pesquisa.	113
REFERÊNCIAS	116
APÊNDICE A - REVISÃO DE ALGUNS RESULTADOS EXPERIMENTAIS.	122
APÊNDICE B - AJUSTAGEM DAS CURVAS C_L E C_D	127
APÊNDICE C - MÉTODO DIRETO PARA CALCULAR AS VELOCIDADES CRÍTICAS	135
APÊNDICE D - FLUXOGRAMA DOS PROGRAMAS PRINCIPAIS	139
SIMBOLOGIA	143

I - INTRODUÇÃO

1.1 - O PROBLEMA DO MOVIMENTO DO CONDUTOR

Durante os últimos quarenta anos, as mudanças sociais ocorridas com o desenvolvimento industrial, a diminuição das fontes de energia não renováveis, fatores econômicos diversos e questões ligadas ao meio ambiente, afetaram significativamente o projeto das linhas de transmissão. O crescimento econômico, trazendo consigo a concentração populacional em áreas relativamente pequenas, criou a necessidade de geração e transmissão de grandes "blocos" de energia. A inflação e as condições ambientais, por sua vez, tornaram as linhas mais caras e mais difíceis de construir do que no passado.

O aumento das distâncias aos centros consumidores e a possibilidade de interligação de sub-sistemas, fez com que se construíssem linhas mais longas, de grande capacidade e alta tensão. A elevação da tensão e da capacidade por circuito, levou os projetistas a usarem feixes de grandes condutores, introduzindo problemas novos no seu projeto mecânico.

Provavelmente, nenhum outro tipo de grande estrutura, tenha sua massa distribuída de forma tão flexível e continuamente exposta a forças do vento, como as linhas de transmissão. Isto as torna suscetíveis de desenvolverem movimentos cíclicos auto-sustentáveis dos condutores. Esses movimentos, podem aparecer na forma de vibrações eólicas, galope do condutor e de oscilações de sub-vão. Em todos eles, pequenos acréscimos de energia mecânica fornecidos pelo vento, são repetidamente absorvidos pelo condutor. Quando isto ocorre em um sistema mecânico elástico de grande porte, que é suportado e suplementado por milhares

de sub-sistemas mecânicos elásticos e semi-elásticos (grampos isoladores, amortecedores, espaçadores, estrutura, etc.), a possibilidade de avarias é apreciável.

Uma complicação adicional é peculiar às linhas de transmissão. Devido às tensões envolvidas, a inspeção periódica que se faz necessária para detectar possíveis danos ao condutor ou outras partes energizadas do sistema, somente é possível quando a linha está fora de serviço. O grau de dificuldade em se programar tais inspeções, cresce com a importância da linha. Dessa maneira, os problemas causados pelo movimento do condutor, devem ser antecipados e prevenidos durante o projeto e os estágios de construção, ou resolvidos com alto custo após inspeção visual.

1.2 - OSCILAÇÕES EM LINHAS DE TRANSMISSÃO

Já foram identificados, três diferentes tipos de movimento cíclico do condutor, tendo como fonte de excitação o vento. As vibrações eólicas, o galope do condutor e as oscilações de sub-vão. Eles se distinguem entre si, pelos diferentes mecanismos de transferência de energia, pelas configurações do movimento, pelas frequências e amplitudes de vibração e pelos diferentes efeitos sobre os condutores, grampos e outros equipamentos. Resumidamente, podemos caracteriza-los como se segue:

a) Vibrações Eólicas

Desde a antiga Grécia, já era conhecido o fato que o ar ao passar por um fio tracionado podia fazê-lo vibrar. Ainda bem distante dos tempos do rádio e da televisão, os gregos construíram caixas sonoras, usando este fenômeno. Eólio, o deus do vento, emprestou seu nome ao aparelho, conhecido como harpa eóli

ca. Quando falamos hoje em vibrações eólicas, algo da antiga tradição clássica foi mantido.

Este tipo de vibração não é muito evidente e pode passar despercebido, exceto para aqueles que a observam sob certas condições. O movimento é mais visível durante as primeiras horas da manhã ou no final da tarde, quando ventos de baixa velocidade (1 a 7 m/s), estão presentes. Sob essas condições, as amplitudes de pico a pico raramente excedem um diâmetro do condutor. Em compensação, as frequências podem ser elevadas, situando-se na faixa de 3 a 150 cps.

A causa básica da vibração eólica, é o desprendimento alternado dos vórtices induzidos pelo vento, na parte superior e inferior do condutor. Esta ação, cria um desbalanceamento das pressões, forçando o condutor a se mover para cima e para baixo, em ângulo reto com a direção do vento. A Figura 1.1 mostra diferentes regimes de escoamento, para o ar passando através de um condutor cilíndrico.

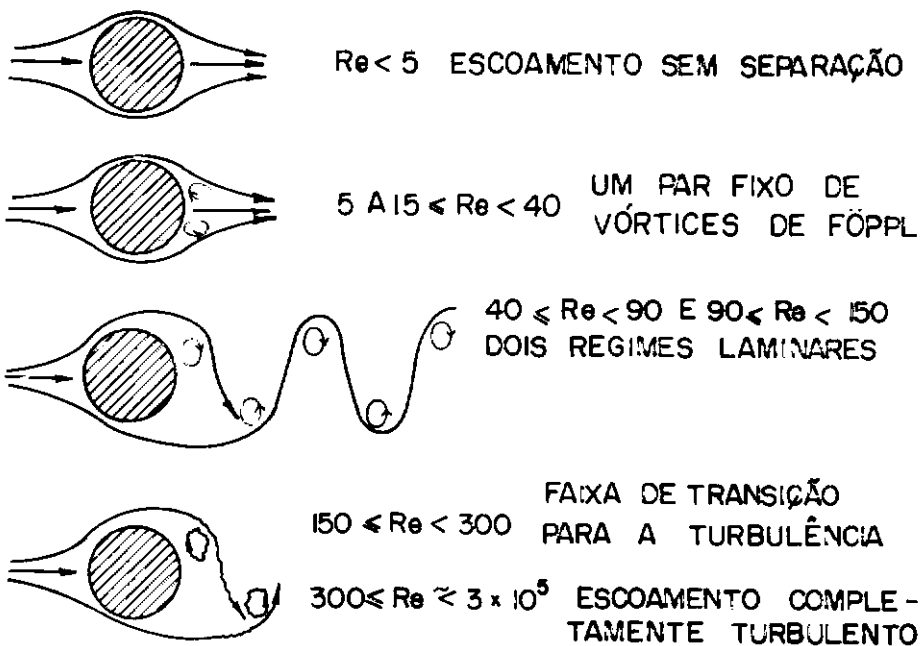


FIGURA 1.1 - FLUXO DE AR ATRAVÉS DE UM CONDUTOR CILÍNDRICO

O número adimensional S (número de Strouhal), relacionando a velocidade do vento (V), o diâmetro do condutor (d) e a frequência do vortex (f), caracterizam este tipo de vibração:

$$S = \frac{fd}{V}$$

As frequências calculadas através da relação anterior, usando o valor de S em torno de 0,2, são suficientemente precisas para todos os propósitos do projeto.

b) Galope do Condutor

Esta vibração, se caracteriza por baixas frequências (0,08 a 3cps) e grandes amplitudes (5 a 300 diâmetros do condutor), com um movimento primariamente vertical. Ela é causada por ventos laterais de intensidade moderada (7 a 18 m/s), atuando sobre uma superfície assimétrica do condutor contendo gelo. Na Figura 1.2 vemos o surgimento da força de sustentação, quando existe assimetria da seção causada pelo depósito de gelo.

Se o depósito de gelo, tem uma forma apropriada, a rotação do condutor em relação ao vento, pode produzir uma variação na sua sustentação e isto pode levá-lo a oscilações na direção vertical. Depois que as oscilações verticais se iniciam, o vetor soma da velocidade absoluta do vento com a velocidade do condutor, produz uma velocidade aparente do vento que formará alternadamente ângulos acima e abaixo da horizontal. Isto resulta em variações alternadas da posição do depósito de gelo em relação ao vento que efetivamente atua sobre o condutor. A Figura 1.3 mostra o movimento do condutor e seu diagrama de velocidades.

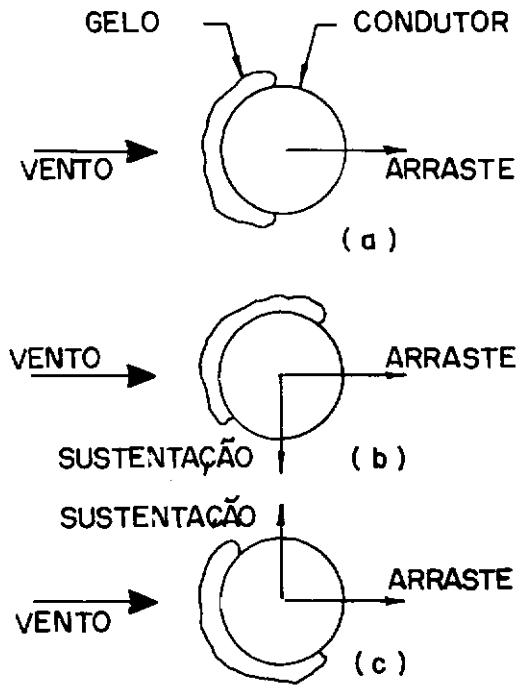


FIGURA 1.2 - FORÇAS DE SUSTENTAÇÃO E DE ARRASTE EM UM CONDUTOR COM DEPÓSITO DE GÊLO

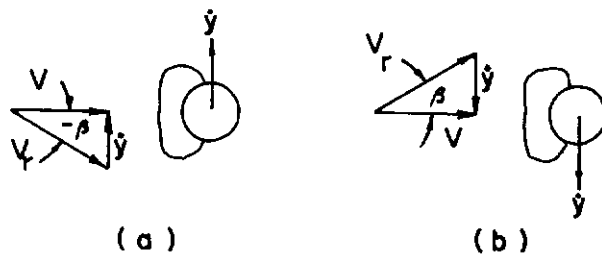


FIGURA 1.3 - DIAGRAMA DE VELOCIDADES NO GALOPE DO CONDUTOR

Se a velocidade do condutor para cima, coincide com uma força aerodinâmica de sustentação positiva e uma velocidade para baixo, com uma força de sustentação negativa, ocorrerá um galope acelerado. Caso contrário, o movimento é suprimido.

Nestas oscilações, a potência transmitida pelo vento ao condutor, é muito maior do que a potência associada com a vibração eólica. A amplitude do galope, pode se aproximar ou mesmo exceder a flecha do condutor, submetendo-o a elevadas cargas dinâmicas, com todos os riscos que daí possam advir.

c) Oscilações de Sub-Vão

O mais recente tipo de movimento do condutor reconhecido, é a oscilação de sub-vão. Ela é peculiar a feixes de condutores expostos a ventos laterais de intensidade moderada ou forte (4 a 30 m/s) e aparecem quando um condutor penetra na esteira de um outro condutor adjacente. A Figura 1.4, mostra o movimento de um condutor na esteira de um outro, em um feixe de dois condutores.

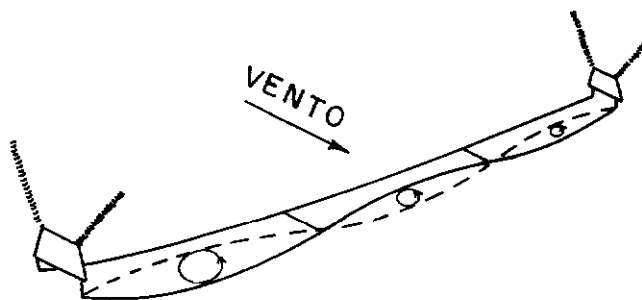


FIGURA 1.4 - OSCILAÇÕES DE SUB-VÃO EM UM FEIXE DE DOIS CONDUTORES

As forças geradas pela esteira de um condutor, mesmo com velocidade constante do vento, são de natureza complexa e variável. Dependendo das magnitudes e relações de fase entre as forças envolvidas, o movimento do condutor dentro da esteira, po

de ser suprimido ou assumir a forma de órbitas elípticas ou irregulares. A Figura 1.5 mostra o movimento típico do condutor, durante o transiente.

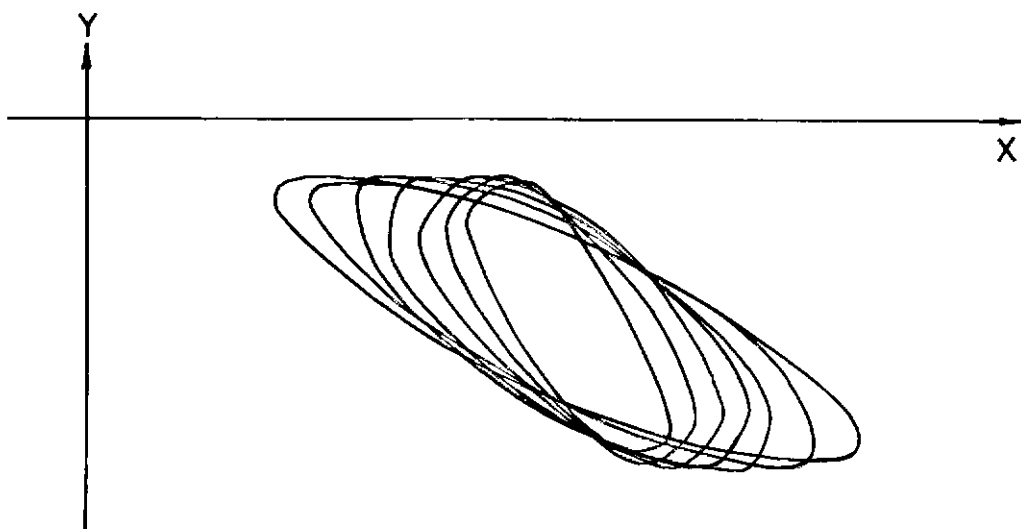


FIGURA 1.5 - MOVIMENTO TRANSIENTE DE UM CONDUTOR NAS OSCILAÇÕES DE SUB-VÃO

Quando o movimento se inicia, uma parte da energia mecânica gerada pela esteira é transmitida de volta ao condutor cuja esteira deu início ao movimento, através dos espaçadores ou outros elementos que formam o acoplamento mecânico entre os condutores no feixe. Nessas condições, o condutor gerador da esteira, pode se mover segundo trajetórias que frequentemente diferem em fase e amplitude daquelas assumidas pelo condutor que está dentro da esteira. Isto complica enormemente as forças aerodinâmicas e mecânicas que atuam sobre um determinado condutor, obviamente dificultando uma correta modelação matemática do problema.

As oscilações de sub-vão, são movimentos dos condutores, que sob certas condições podem ficar restritos a um ou a

um pequeno número de sub-vãos adjacentes, dependendo de como a energia fornecida pelo vento se distribui ao longo da linha. Na verdade, essa distribuição de energia, se dá na forma de uma complexa propagação de ondas ao longo do vão, onde o amortecimento aerodinâmico e os vínculos da estrutura, jogam um papel fundamental na forma da partição de energia para cada sub-vão. Em determinadas situações, o movimento pode se propagar ao longo de todo o vão, e nestes casos, dizemos que o feixe oscila. O movimento global do feixe, é uma combinação desses movimentos de onda em vários sub-vãos. Apesar desses movimentos serem complexos, eles podem ser resolvidos em termos de quatro tipos básicos, conhecidos como modos normais de propagação. Qualquer movimento estacionário do feixe, pode ser entendido como uma combinação dos modos normais. Os quatro modos são mostrados na Figura 1.6.

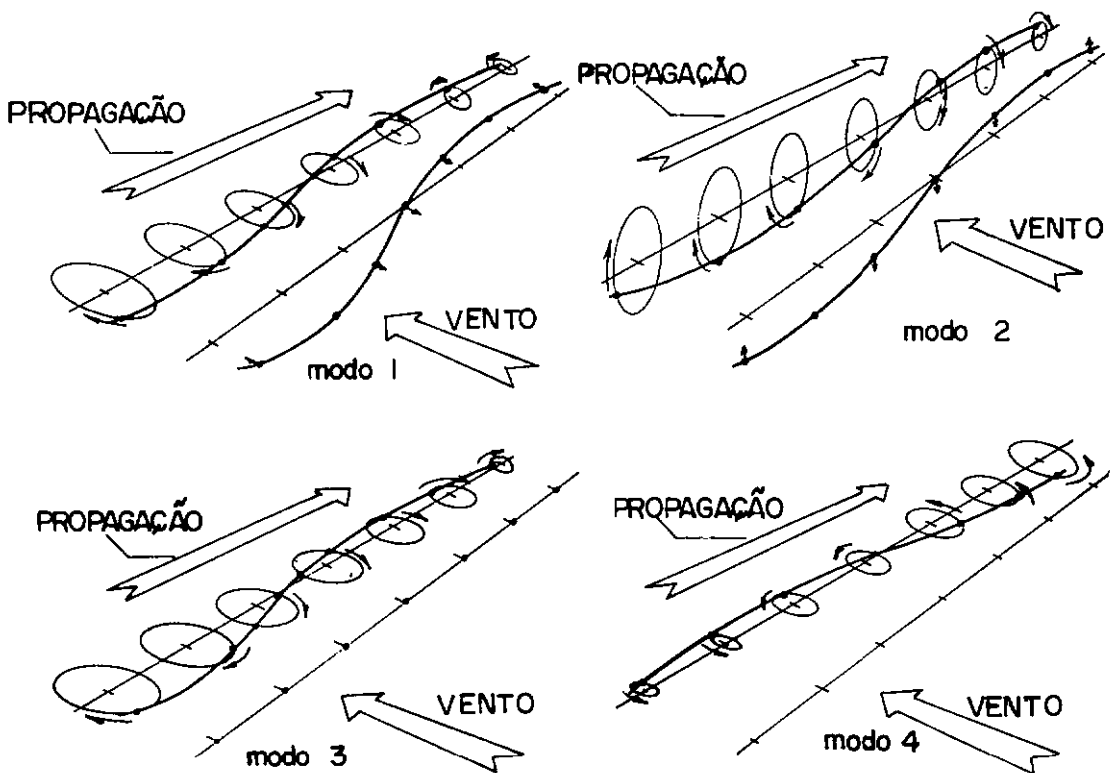


FIGURA 1.6 - MODOS NORMAIS DE PROPAGAÇÃO PARA UM FEIXE DE DOIS CONDUTORES

Para um estudo em profundidade sobre as oscilações em linhas de transmissão, consultar a referência 1.

1.3 - SITUAÇÃO ATUAL DA PESQUISA SOBRE AS OSCILAÇÕES DE SUB-VÃO

Em relação as vibrações eólicas e ao galope do condutor, as oscilações de sub-vão constituem o problema mais recente e reconhecido como realmente significativa nas linhas de transmissão. Isto porque os feixes de condutores nunca foram usados até o final dos anos 50, e não foram utilizados em condições de provocar as oscilações de sub-vão, até meados dos anos 60.

Os primeiros danos causados a essas linhas por este tipo de oscilação, foram falhas por fadiga e desgaste nos elementos de suspensão ou nos espaçadores. Com a identificação do problema, vários programas de pesquisa e testes de campo tiveram início, muitos dos quais continuam em franco progresso. Esses esforços, lançaram muitas luzes sobre as causas e os mecanismos envolvidos neste fenômeno. Alguns trabalhos foram publicados e um volume considerável de experimentação em túnel de vento foi acumulado.

A despeito de tudo isto, o estágio tecnológico alcançado até o presente, é insuficiente para enfrentar o problema em vários aspectos importantes, especialmente no que tange ao projeto. Existem muitas razões para isto, as principais sendo a grande complexidade do fenômeno e o grande número de variáveis envolvidas. O fator complexidade, tornou os estudos analíticos demorados e mais úteis como instrumentos de pesquisa do que como um guia para o projetista. O grande número de variáveis em pauta nos ensaios de laboratório, indicou que a possibilidade de generalização era muito limitada. Essas dificuldades na pesquisa,

seja de natureza teórica ou experimental, está retardando a formação de um consenso de que variáveis são importantes ou não e quais as simplificações que devem ser feitas, nos tratamentos analíticos do problema.

1.4 - REVISÃO DE ESTUDOS ANALÍTICOS PUBLICADOS

O primeiro trabalho sobre as oscilações de sub-vão, surgiu em 1967 com o relatório de I.P. Smith² ao C.E.R.L. (Central Electricity Research Laboratories), na Inglaterra. Após este trabalho pioneiro, muitos artigos foram publicados em revistas especializadas, refletindo uma grande preocupação com o problema. A maioria dos estudos analíticos foram feitos, com dois objetivos básicos:

- 1º - obter uma melhor compreensão sobre as causas fundamentais e mecanismos das oscilações
- 2º - o desenvolvimento de métodos para prever o comportamento do sub-vão.

Essas análises, tratam principalmente com sistemas simplificados, de sorte que possam ser testados em túnel de vento. Em geral, há uma boa concordância qualitativa entre esses estudos. Do ponto de vista quantitativo, ainda existe uma grande distância a ser percorrida, para que teoria e experimentação possam convergir.

Os principais trabalhos publicados podem ser agrupados, dependendo do enfoque adotado, da seguinte forma:

a) A Análise de Simpson

O trabalho exploratório de Smith, foi posto numa forma mais concisa e posteriormente desenvolvido por Alan Simpson da Universidade de Bristol. A análise feita por Simpson³, diz

respeito a um sistema com dois graus de liberdade, onde foram estudados certos efeitos sobre a energia do sistema, bem como a frequência de sincronização (confluência). Os acoplamentos aer-elástico e mecânico foram considerados. A análise é linear e adequada ao estudo da estabilidade do sistema. Os dados para os coeficientes de sustentação (C_L) e de arraste (C_D) provêm de medições estáticas em túnel de vento.

Outros estudos similares apareceram. Ikegami^{4,5} et al, estenderam a análise de Simpson para incluir os efeitos do amortecimento nos suportes, sobre a estabilidade.

Diana e Giordana^{6,7} ignoraram o amortecimento aerodinâmico e realizaram testes com modelos em túnel de vento, concluindo que este amortecimento não pode ser desprezado. Ko^{8,9}, considerou os efeitos de rotação do feixe e discutiu os problemas de um modelo em escala reduzida, quando testado em túnel de vento. Simpson e Price^{10,11}, estudaram formulações alternativas para a matriz de amortecimento aerodinâmico e conduziram extensivos testes em túnel de vento, concluindo que este amortecimento pode ser ignorado se as frequências naturais do sistema, não são muito próximas.

Tsui¹², estabeleceu explicitamente e demonstrou experimentalmente a relação entre as propriedades de simetria das forças aerodinâmicas e o sistema de suspensão (molas).

b) A Análise do Modo de Corpo-Rígido

Simpson e Lawson¹³, analisaram os movimentos de galope do feixe. São estudos sobre os modos normais não amortecidos, com um grau de liberdade. A análise é linear, e com esta restrição, somente é aplicável no caso em que o feixe é rigida-

mente suportado em ambas as torres e oscila com pequenas amplitudes. Os autores, estudaram inicialmente o galope dos condutores, com depósito de gelo.

Brzozowski e Hawks¹⁴, posteriormente publicaram um trabalho independente para a mesma representação do feixe.

c) Análises com Múltiplos Graus de Liberdade

Dois trabalhos foram publicados nos quais um segmento de feixe é analisado. Ko¹⁵, considerou o caso de quatro condutores suspensos por molas lineares dentro de um anel sem massa (segmento de feixe), este também suportado por molas lineares, permitindo movimento do feixe em três direções: horizontal, vertical e rotação em torno do eixo horizontal passando pelo centro do feixe.

Uma análise semelhante foi publicada por Curami et al^{16,17}. Nela, o anel representando o segmento de feixe, foi substituído por um espaçador. A suspensão do espaçador é tal que permite movimentos de corpo rígido do feixe e o número de condutores no feixe foi estendido para seis.

d) Métodos de Energia

Os estudos analíticos grupados nos itens anteriores, são todos lineares. A validade desses estudos, obviamente está limitada a pequenas amplitudes de movimento e somente são capazes de prever em que condições essas amplitudes podem crescer e sua velocidade de crescimento. As análises lineares não permitem a previsão das amplitudes máximas que as oscilações atingem. Para superar esta limitação Diana e Gaspareto^{18,19}, aplicaram o princípio da conservação de energia ao balanço global de energia, no sistema estudado por Simpson. Dessa maneira, levaram

parcialmente em conta, a não uniformidade do campo de forças aerodinâmico. Apesar das simplificações contidas neste estudo, foi encontrada uma boa correlação entre os resultados previstos na análise e as medições dos ciclos limite no túnel de vento.

Diana et al, estenderam este tipo de análise para o movimento de feixes²⁰. Nesta análise, a escolha dos modos considerados, foi restringida aos modos normais não amortecidos do feixe ao longo do vão e esses modos foram determinados através da separação dos modos normais²¹. As amplitudes dos ciclos limite foram previstas, quando a energia fornecida pelas forças aerodinâmicas era balanceada pela dissipação do sistema, através dos espalhadores. Não fica claro na análise como o amortecimento aerodinâmico é levado em conta.

e) Análise Linear com Elementos Finitos

O método dos elementos finitos, permite o uso de modelos com muitos graus de liberdade e uma boa precisão nos resultados numéricos.

Neste tipo de análise, os condutores do feixe, são sub-divididos em um certo número de barras circulares ligadas entre si pelas extremidades. Estes segmentos ou elementos, são governados por equações diferenciais ordinárias e as equações para o movimento do feixe, pelo sistema simultâneo de equações diferenciais ordinárias. A análise que é feita, consiste no estudo convencional de auto-valores e auto-vetores.

Teoricamente, o método dos elementos finitos, pode fornecer resultados muito próximos do exato comportamento do feixe. A aproximação, depende do tipo de elemento usado e do número de sub-divisões do condutor, ou seja, do número de elementos

empregado. A escolha do tipo de elemento e da dimensão do mesmo, é muito importante, pois uma escolha inadequada, conduz a resultados imprecisos.

Alguns estudos de estabilidade, empregando este método, surgiram nos últimos anos. O primeiro, devido a Ko e Wardlaw^{9, 22} usou um elemento relativamente sofisticado mas em pequena quantidade. Um único elemento foi usado para representar cada condutor em cada sub-vão. Este estudo, foi comparado com ensaios em túnel de vento, de um modelo em escala reduzida. Uma boa concordância qualitativa foi encontrada.

Um outro estudo de estabilidade foi publicado por Curami et al²³. O elemento empregado era uma barra rígida e três elementos foram usados para representar cada condutor em cada sub-vão. O procedimento matemático é semelhante ao anterior. Os resultados deste estudo, foram comparados com as oscilações observadas na linha de teste de Pradarena Pass, com bons resultados.

f) Análise Não-Linear com Elementos Finitos

Os estudos analíticos discutidos no item anterior, somente são válidos para pequenas amplitudes de vibração, pois partem da hipótese que as forças que atuam dentro ou sobre o feixe variam linearmente com a amplitude. Como sabemos, as forças aerodinâmicas não variam linearmente com as amplitudes se essas amplitudes são grandes. O afastamento da linearidade, é usualmente significativo, quando a amplitude de vibração é da ordem de um diâmetro do condutor. Além do mais, as amplitudes dos ciclos limite, são causadas exatamente pelo efeito das não linearidades.

O único trabalho que temos conhecimento, usando es

te tipo de análise, é o de Curami et al²³. Nele, foi feita uma integração passo a passo, das equações não-lineares do movimento, para feixes com dois e três condutores. Os resultados mostraram boa concordância com os obtidos na linha de teste da Pradarena Pass, mesmo com dados para condutores lisos, enquanto a linha, usa cabos.

1.5 - TIPOS DE EXPERIMENTAÇÃO EM TUNEL DE VENTO

Quando um feixe de múltiplos condutores, está orientado em relação ao vento, de tal maneira que alguns condutores geram esteiras e outros se encontram dentro dessas esteiras, um complicado sistema de forças aerodinâmicas, atua sobre cada um dos condutores e conseqüentemente sobre todo o feixe. Essas forças, são funções da posição da esteira, do número de Reynolds, da inclinação do feixe em relação ao vento, da rugosidade das superfícies dos condutores e das condições ambientais.

O grau de complexidade dessas forças, pode ser reduzido sem grande perda de generalidade do fenômeno, se um feixe simples, formado somente por dois condutores, é considerado. Neste caso, uma única esteira é gerada pelo condutor em contato direto com o vento incidente e o segundo condutor pode estar imerso nessa esteira.

Para um feixe assim descrito, formando um ângulo zero com o vento incidente, a variação dos coeficientes de sustentação (C_L) e de arraste (C_D) com a posição vertical, para o condutor dentro da esteira, é mostrada na Figura 1.7 .

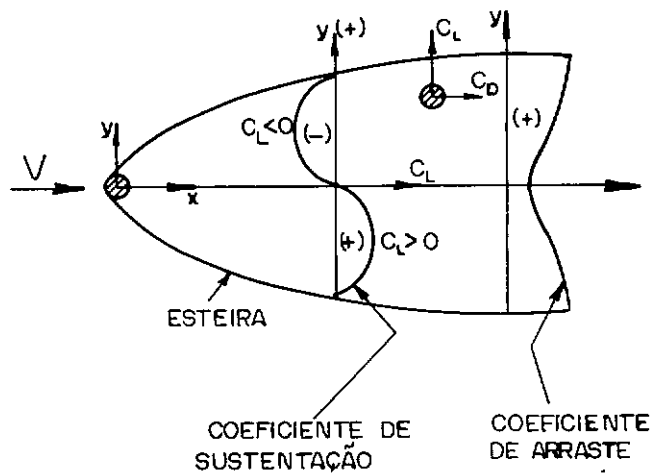


FIGURA 1.7 - VARIAÇÃO DE C_L E C_D COM A POSIÇÃO VERTICAL

Devido a natureza complexa das forças aerodinâmicas, nenhum método teórico rigoroso existe, para a previsão dessas forças. Na realidade, há um certo grau de incerteza, sobre a origem da força de sustentação^{10,24,25}. Esta incerteza, associada com a dificuldade teórica de levar em conta alguns efeitos tais como a rugosidade superficial e o enrolamento do cabo, tem levado a um aumento do número de experimentos em túnel de vento, a fim de determinar as características aerodinâmicas dos feixes de condutores.

Basicamente, são feitos dois diferentes tipos de experimentos em túnel de vento. O primeiro, consiste no teste de modelos reduzidos, representando vãos ou sub-vãos, usando cilindros rígidos, com o propósito de obter uma melhor compreensão dos mecanismos que causam as oscilações ou com a finalidade de testar teorias que fazem previsão acerca dessas oscilações. Este tipo de experimento, é comumente chamado de ensaio dinâmico.

O segundo tipo, consiste em medições estáticas ou quase-estáticas das forças aerodinâmicas atuantes no feixe, e essas medidas se destinam a implementar os estudos analíticos das oscilações, conforme foi descrito no item anterior. Ele é usualmente conhecido como ensaio estático. Tentaremos descrever sucintamente ambos os ensaios.

a) Ensaio Dinâmico

Neste tipo de ensaio, um modelo bi-dimensional é o mais empregado^{3, 26, 27}. O modelo, geralmente é composto por cilindros rígidos de pequenos comprimentos e as propriedades elásticas do sub-vão, são simuladas por molas de suspensão nas extremidades dos cilindros. Desta maneira, o modelo é testado no túnel de vento.

Os estudos conduzidos com esses sistemas elásticos (modelo), têm mostrado que se o acoplamento mecânico entre os condutores é desprezado, existe somente um pequeno movimento induzido nos condutores geradores de esteira e um pequeno efeito de realimentação sobre o condutor imerso na esteira. Por esta razão, somente o condutor dentro da esteira é suspenso por molas. Na Figura 1.8, é mostrado esquematicamente um ensaio dinâmico com modelo, conforme foi usado nas referências 26 e 28.

O sistema de suspensão do modelo, emprega molas em ambas as extremidades, com tensões aplicadas, de forma a controlar a flecha e as frequências naturais. A dinâmica deste sistema, é muito semelhante a que o condutor real está submetido, propiciando o acoplamento entre os movimentos horizontal e vertical. Contudo, as frequências e suas razões não podem ser independentemente controladas.

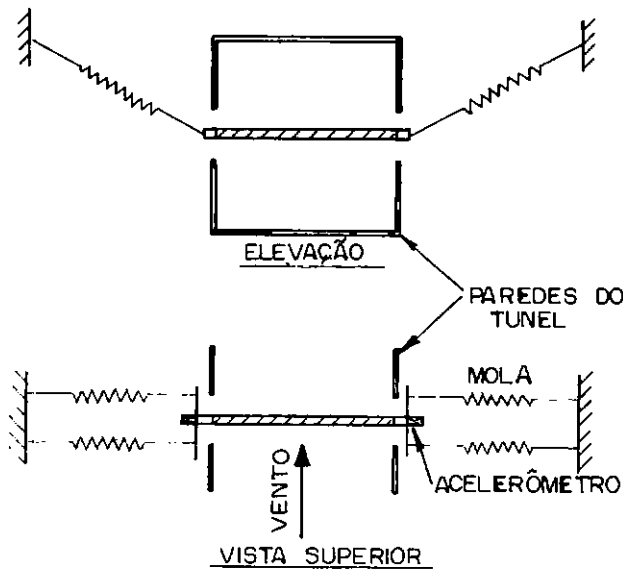


FIGURA 1.8 - ENSAIO DINÂMICO COM MODELO

Como resultado dos ensaios dinâmicos, as seguintes observações podem ser feitas:

- i) Este tipo de experimento, fornece bons resultados para os estudos de estabilidade linear. Contudo, é muito difícil extrapolar diretamente os resultados destes ensaios para as condições reais dos condutores na linha. Isto se deve ao caráter bi-dimensional do escoamento e a ausência de uma correta realimentação entre os condutores.
- ii) A relação entre as frequências é muito importante para a estabilidade do feixe. Instabilidades ocorrem, somente para razões entre as frequências, diferentes de 1 e não ocorrerá, se o valor absoluto da diferença excede um certo valor máximo.
- iii) As regiões instáveis, ocorrem quando o condutor está próximo das extremidades da esteira.

O ensaio dinâmico com modelo reduzido, é um bom método para obter resultados qualitativos acerca das configurações do movimento e outros efeitos tais como, tipos de espaçadores e rotação do feixe.

b) Ensaio Estático

O ensaio estático, é normalmente conduzido, no sentido de obter dados para tipos específicos de condutores e geometrias do feixe e dessa maneira poder utilizá-los nos estudos analíticos. Para a obtenção desses dados, empregam-se modelos de seções pequenas e condutores rigidizados, semelhante ao que foi feito no ensaio dinâmico. As seções do modelo, em contato direto com o vento incidente, são rigidamente montadas e as forças aerodinâmicas que atuam nos condutores imersos nas esteiras, são assim medidas.

A Figura 1.9, mostra um ensaio estático típico, conforme foi usado nas referências 29, 30, 31, 32 e 33.

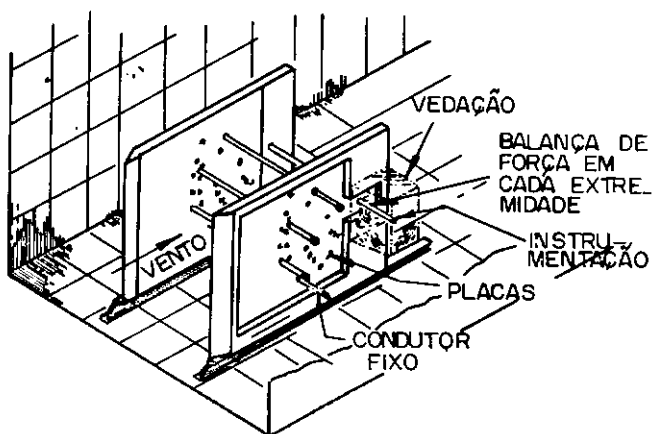


FIGURA 1.9 - ENSAIO ESTÁTICO COM MODELO

Todos os estudos referidos neste item, buscaram medir principalmente os coeficientes de sustentação e de arraste, tanto para cabos como para condutores lisos. No Apêndice A, os dados obtidos por diversos autores, são mostrados e comparados entre si.

1.6 - OBJETIVOS DA TESE

A partir do item 1.4, podemos concluir que um volume apreciável de estudos teóricos, experimentais, ou uma combinação entre eles, associados a sofisticados métodos numéricos, foi acumulado nos últimos dez anos, buscando um melhor entendimento do fenômeno das oscilações de sub-vão. No entanto, a grande maioria dessas investigações, continua circunscrita ao campo de estudo dos sistemas lineares, com todas as limitações que lhe são inerentes. Sendo as oscilações de sub-vão, um fenômeno intrinsecamente não linear, é de se supor que seu estudo não linear, conduza a uma visão mais abrangente acerca de seus mecanismos internos, principalmente no que diz respeito a previsão das amplitudes máximas atingidas pelas oscilações. O conhecimento dessas amplitudes e das variáveis diretamente relacionadas com elas continua a ser, do ponto de vista do engenheiro, a questão da maior importância pelo papel que desempenha no processo de fadiga nos cabos e no desgaste dos elementos de suspensão.

O presente trabalho, tem por objetivo central, fazer o estudo analítico não linear das oscilações de sub-vão, partindo do mesmo sistema investigado por Simpson³ e outros pesquisadores que lhe sucederam. Isto será feito, tendo como premissa básica, o fato que o sistema estudado por Simpson, além de apresentar bons resultados quando linearizado, deverá fornecer ou-

tras informações não reveladas pela análise linear, quando um enfoque não linear lhe for aplicado.

Para atingir o objetivo principal, alguns obstáculos têm que ser vencidos. O mais importante, consiste na obtenção de uma descrição matemática simples dos coeficientes de sustentação e de arraste, de modo a tornar o estudo analítico também mais simples. Devido às dificuldades em se fazer um ensaio estático com modelo reduzido, optou-se pela utilização de resultados experimentais já publicados para os coeficientes de sustentação e de arraste, de modo que funções semi-empíricas sejam incorporadas ao modelo matemático.

Para complementar o estudo analítico, algumas simulações com os computadores analógico e digital serão feitas.

1.7 - COMENTÁRIOS

De maneira geral, temos o seguinte a comentar:

- a) O movimento oscilatório dos condutores, nas linhas de transmissão, sob qualquer forma que se apresente constitui um problema de real importância para o seu projeto mecânico. Vários aspectos deste problema continuam em aberto, principalmente os relacionados com os métodos de previsão de sua ocorrência e os meios de evitá-lo ou mesmo minimizá-lo.
- b) Dentre os tipos de movimento do condutor, as oscilações de sub-vão se destacam como o mais recente, onde as previsões sobre as amplitudes máximas das oscilações, não só continuam em aberto, como praticamente inexistem estudos analíticos a esse respeito.
- c) O alto investimento necessário para montagem de linhas experimentais de teste, ao lado das limitações dos estudos analíticos até agora realizados, têm levado a um aumento conside-

rável do número de experimentos com modelos reduzidos em túnel de vento, na tentativa de reproduzir o que se passa com o sistema real.

- d) O enfoque não linear do problema das oscilações de sub-vão, combinado com novos estudos experimentais, deverá revelar as pectos novos do fenômeno, com aplicação direta no projeto me cânico.

II - MODELO NÃO LINEAR SIMPLIFICADO

2.1 - MODELO MATEMÁTICO

Para o estudo que se segue faremos as seguintes hipóteses:

- a) Os condutores são idênticos, lisos e rígidos.
- b) Um dos condutores é mantido fixo. Isto implica em não considerar acoplamento mecânico entre eles.
- c) Os coeficientes de sustentação e de arraste, são independentes da velocidade do vento. Eles são obtidos a partir de medições estáticas em túnel de vento, obedecendo a hipótese b).
- d) Não existe interação entre as esteiras geradas pelos condutores fixo e móvel, na faixa de 10 a 30 diâmetros do condutor.
- e) A velocidade local do vento, no condutor móvel, é sempre horizontal.
- f) O escoamento é bi-dimensional. Nenhum efeito de ponta é considerado.
- g) As molas são lineares.
- h) O condutor móvel, possui pequenos deslocamentos em torno da posição não perturbada.
- i) Toda a massa do condutor móvel, é concentrada em uma única massa discreta.

Consideremos um feixe formado por dois condutores. Sobre o condutor fixo, fazemos coincidir a origem de um sistema de coordenadas X, Y . O condutor móvel, na posição não perturbada, terá coordenadas (X_0, Y_0) e chamaremos de m, d e ℓ sua massa, diâmetro e comprimento, respectivamente. O vetor velocidade do vento \underline{V} , está dirigido segundo o eixo dos X . A

velocidade local do vento, no condutor móvel, é dada por $\eta \underline{V}$, onde η é uma constante que leva em conta a esteira do condutor fixo. K_{XX} e K_{YY} representam a rigidez horizontal e vertical dos suportes do condutor móvel.

A Figura 2.1 mostra o sistema de forças e o diagrama de velocidade sobre o condutor móvel.

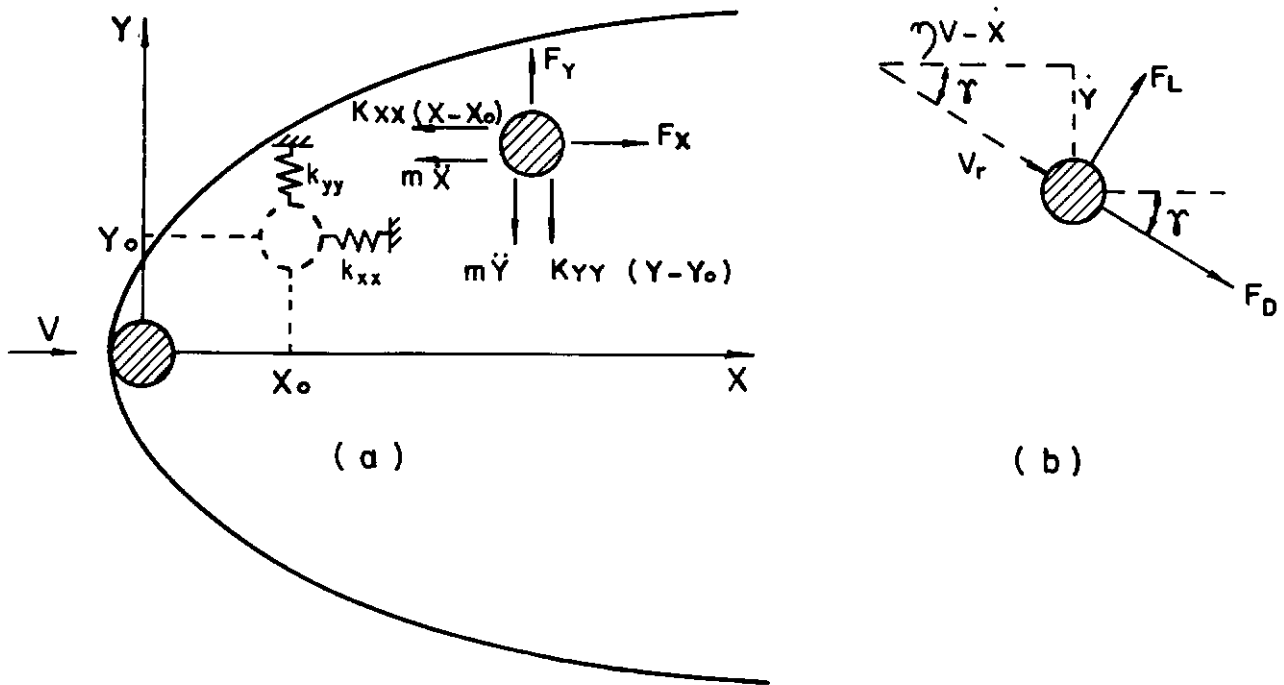


FIGURA 2.1 - FORÇAS E VELOCIDADES RELATIVAS

Fazendo o balanço das forças sobre o condutor móvel, obtemos:

$$m \ddot{X} + K_{XX} (X - X_0) = F_X \quad (2.1)$$

$$m \ddot{Y} + K_{YY} (Y - Y_0) = F_Y$$

onde:

F_X e F_Y são as componentes das forças aerodinâmicas e
 (X, Y) são as coordenadas do condutor móvel

Da Figura (2.1) podemos escrever:

$$F_X = F_L \sin \gamma + F_D \cos \gamma \quad (2.2)$$

$$F_Y = F_L \cos \gamma - F_D \sin \gamma$$

onde:

F_L e F_D são as forças de sustentação e de arraste sobre o condutor móvel e γ é o ângulo que a velocidade relativa do vento \underline{V}_r , faz com o eixo dos X .

Como $\eta V - \dot{X} \gg \dot{Y}$ temos que:

$$\underline{V}_r = \sqrt{(\eta V - \dot{X})^2 + \dot{Y}^2} \approx (\eta V - \dot{X}) \quad (2.3)$$

As forças de sustentação e de arraste, são dadas por:

$$F_L = \frac{1}{2} \rho \ell d V_r^2 C_L^* = \frac{\rho \ell d V_r^2}{2 \eta^2} C_L$$

$$F_D = \frac{1}{2} \rho \ell d V_r^2 C_D^* = \frac{\rho \ell d V_r^2}{2 \eta^2} C_D \quad (2.4)$$

onde:

C_L^* e C_D^* são os coeficientes de sustentação e de arraste baseados na velocidade local do vento. Eles estão relacionados com C_L e C_D calculados com base na velocidade \underline{V} através das relações:

$$C_L = \eta^2 C_L^* \quad ; \quad C_D = \eta^2 C_D^*$$

Substituindo (2.4) em (2.2), obtemos:

$$F_X = \frac{\rho \ell d}{2 \eta^2} \{C_L (\dot{Y} V_r) + C_D (\eta V - \dot{X}) V_r\}$$

$$F_Y = \frac{\rho \ell d}{2 \eta^2} \{C_L (\eta V - \dot{X}) V_r - C_D (\dot{Y} V_r)\}$$

Usando (2.3) e desprezando os termos de segunda ordem (\dot{X}^2 e $\dot{X}\dot{Y}$), temos:

$$F_X \approx \frac{\rho \ell d V}{2 \eta} \{C_L \dot{Y} + C_D (\eta V - 2 \dot{X})\} \quad (2.5)$$

$$F_Y \approx \frac{\rho \ell d V}{2 \eta} \{C_L (\eta V - 2 \dot{X}) - C_D \dot{Y}\}$$

Combinando (2.1) e (2.5) temos as seguintes equações:

$$m \ddot{X} + K_{XX} (X - X_0) = \frac{\rho \ell d V}{2 \eta} \{C_L \dot{Y} + C_D (\eta V - 2 \dot{X})\} \quad (2.6)$$

$$m \ddot{Y} + K_{YY} (Y - Y_0) = \frac{\rho \ell d V}{2 \eta} \{C_L (\eta V - 2 \dot{X}) - C_D \dot{Y}\}$$

Introduzindo as seguintes variáveis, podemos tornar (2.6) adimensional:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{X - X_0}{d} & ; & & y &= \frac{Y - Y_0}{d} & ; & & x_0 &= \frac{X_0}{d} & , & & y_0 &= \frac{Y_0}{d} \\
 \omega_x^2 &= \frac{K_{XX}}{m} & ; & & \omega_y^2 &= \frac{K_{YY}}{m} & , & & k &= \frac{\omega_y}{\omega_x} & , & & \tau &= \omega_x t \\
 \mu &= \frac{\rho l d V}{2 \eta m \omega_x} & ; & & \alpha &= \frac{\eta V}{d \omega_x}
 \end{aligned}$$

(2.7)

O modelo fica então:

$$x'' + x = \mu \{C_L y' + C_D (\alpha - 2 x')\}$$

(2.8)

$$y'' + k^2 y = \mu \{C_L (\alpha - 2 x') - C_D y'\}$$

onde a ' representa diferenciação em relação ao tempo adimensional τ e μ é um parâmetro pequeno para $0 < V < 30$ m/s.

2.2 - COEFICIENTES DE SUSTENTAÇÃO E DE ARRASTE

Uma das dificuldades em se estudar o modelo (2.8) consiste na obtenção de C_L e C_D , o que só pode ser feito experimentalmente. No presente trabalho, utilizaremos os resultados experimentais publicados por Cooper²⁶.

Vários pesquisadores, tentaram representar C_L e C_D usando modelos matemáticos diferentes. Os trabalhos mais conhecidos são os de Simpson³⁴ e Diana et al²⁰. O primeiro usou funções trigonométricas e o segundo, polinômios de alta ordem para cobrir regiões diferentes na esteira do condutor fixo.

Os modelos matemáticos disponíveis não são fáceis

de implementar o estudo analítico, como pretendemos fazer. Dessa maneira, buscou-se um modelo matemático simples, que melhor representasse aquelas funções, dentro de um certo intervalo de estudo. O modelo escolhido foi:

$$C_L = \frac{1}{\left(\frac{x}{d}\right)} \{A_1 \left(\frac{y}{d}\right)^3 - A_2 \left(\frac{y}{d}\right)\}$$

$$C_D = B_1 \left(\frac{y}{d}\right)^4 + B_2 \left(\frac{y}{d}\right)^2 + B_3 \sqrt{\left(\frac{x}{d}\right)} + B_4$$

A ajustagem das curvas, usando o método dos mínimos quadrados, mostrou que os seguintes valores dos coeficientes fornecem a melhor representação na região $10 < x_0 < 30$ e $y_0 < 4$ (Apêndice B)

$A_1 = 0,07 \quad ; \quad A_2 = 1,07$
$B_1 = - 0,004 \quad ; \quad B_2 = 0,10 \quad ; \quad B_3 = 0,04 \quad ; \quad B_4 = 0,47$

(2.9)

Usando as variáveis de (2.7), os coeficientes de sustentação e de arraste podem ser escritos:

$C_L = \frac{1}{x + x_0} \{A_1 (y + y_0)^3 - A_2 (y + y_0)\}$
$C_D = B_1 (y + y_0)^4 + B_2 (y + y_0)^2 + B_3 \sqrt{x + x_0} + B_4$

(2.10)

2.3 - MODELO NÃO LINEAR SIMPLIFICADO

Como uma primeira aproximação, os coeficientes C_L e C_D podem ser escritos na forma:

$$C_L = a_0 + a_1 x + a_2 y \quad (2.11)$$

$$C_D = b_0 + b_1 x + b_2 y$$

onde os coeficientes a_0 , a_1 , a_2 e b_0 , b_1 , b_2 são obtidos expandindo as expressões para C_L e C_D em série de Taylor em torno de (x_0, y_0) . Esta expansão fornece:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{A_1 y_0^3 - A_2 y_0}{x_0} & ; & \quad b_0 = B_1 y_0^4 + B_2 y_0^2 + B_3 \sqrt{x_0} + B_4 \\ a_1 &= -\frac{A_1 y_0^3 - A_2 y_0}{x_0^2} & ; & \quad b_1 = \frac{B_3}{2 \sqrt{x_0}} \\ a_2 &= \frac{3 A_1 y_0^2 - A_2}{x_0} & ; & \quad b_2 = 4 B_1 y_0^3 + 2 B_2 y_0 \end{aligned}$$

(2.12)

onde $x_0 > 10$.

O modelo (2.8) toma a forma:

$$x'' + x = \mu \{y' (a_0 + a_1 x + a_2 y) + (\alpha - 2 x') (b_0 + b_1 x + b_2 y)\}$$

$$y'' + k^2 y = \mu \{(\alpha - 2 x') (a_0 + a_1 x + a_2 y) - y' (b_0 + b_1 x + b_2 y)\}$$

Para que o modelo fique livre de componentes constantes, fazemos a seguinte transformação linear:

$$x = u_1 + x_* \quad ; \quad y = u_2 + y_* \quad (2.13)$$

Substituindo (2.13) no modelo e igualando a zero os termos constantes, obtemos:

$$\begin{aligned} x_* &= \left\{ \frac{a_0 b_2 - b_0 \left[a_2 - \frac{k^2}{\mu \alpha} \right]}{D} \right\} \\ y_* &= \left\{ \frac{b_0 a_1 - a_0 \left[b_1 - \frac{1}{\mu \alpha} \right]}{D} \right\} \\ D &= \left[b_1 - \frac{1}{\mu \alpha} \right] \left[a_2 - \frac{k^2}{\mu \alpha} \right] - a_1 b_2 \\ D &\neq 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

O modelo pode finalmente ser posto na forma:

$$\begin{aligned} u_1'' - \gamma_1 u_2 + \omega_1^2 u_1 &= \mu \{ (a_1 u_1 + a_2 u_2) u_2' - 2 (b_1 u_1 + b_2 u_2) u_1' \\ &\quad + \hat{v}_2 u_2' - 2 \hat{v}_1 u_1' \} \\ u_2'' - \gamma_2 u_1 + \omega_2^2 u_2 &= - \mu \{ 2 (a_1 u_1 + a_2 u_2) u_1' + (b_1 u_1 + b_2 u_2) u_2' \\ &\quad + \hat{v}_1 u_2' + 2 \hat{v}_2 u_1' \} \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde:

$$\begin{array}{lcl}
 \omega_1^2 = 1 - \mu \alpha b_1 & ; & \omega_2^2 = k^2 - \mu \alpha a_2 \\
 \gamma_1 = \mu \alpha b_2 & ; & \gamma_2 = \mu \alpha a_1 \\
 \hat{v}_1 = \frac{x_*}{\mu \alpha} & ; & \hat{v}_2 = \frac{k^2 y_*}{\mu \alpha}
 \end{array} \quad (2.16)$$

O modelo matemático que será estudado no presente capítulo, é, obviamente um sistema de equações diferenciais não lineares, acoplado.

2.4 - MÉTODO DAS MÚLTIPLAS ESCALAS DE TEMPO

Dentre os métodos empregados na solução de modelos não lineares, o método das múltiplas escalas de tempo, vem sendo extensivamente usado por vários pesquisadores nos últimos anos^{35,36}.

Admitiremos para (2.15) uma solução da forma:

$$\left. \begin{array}{l}
 u_1 = \varepsilon u_{11}(T_0, T_1) + \varepsilon^2 u_{12}(T_0, T_1) + \dots \\
 u_2 = \varepsilon u_{21}(T_0, T_1) + \varepsilon^2 u_{22}(T_0, T_1) + \dots
 \end{array} \right\} \quad (2.17)$$

onde:

$$\left. \begin{array}{l}
 T_0 = \tau \quad ; \quad T_1 = \varepsilon \tau \\
 \hat{v}_1 = \varepsilon v_1 \quad ; \quad \hat{v}_2 = \varepsilon v_2
 \end{array} \right\} \quad (2.18)$$

$u_{ij}(T_0, T_1)$ são funções desconhecidas e ε é um parâmetro pequeno mas finito.

Os operadores $\frac{d}{d\tau}$ e $\frac{d^2}{d\tau^2}$ são dados por:

$$\frac{d}{d\tau} = D_0 + \epsilon D_1$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} = D_0^2 + \epsilon (2 D_0 D_1) + \epsilon^2 D_1^2$$

onde:

$$D_0 = \frac{\partial}{\partial T_0} \quad ; \quad D_1 = \frac{\partial}{\partial T_1}$$

Substituindo (2.17) em (2.15) e igualando os coeficientes de ϵ e ϵ^2 a zero, obtemos:

$$\left. \begin{aligned} D_0^2 u_{11} - \gamma_1 u_{21} + \omega_1^2 u_{11} &= 0 \\ D_0^2 u_{21} - \gamma_2 u_{11} + \omega_2^2 u_{21} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

e

$$\left. \begin{aligned} D_0^2 u_{12} - \gamma_1 u_{22} + \omega_1^2 u_{12} &= \mu \{ (a_1 u_{11} + a_2 u_{21}) (D_0 u_{21}) \\ &\quad - 2 (b_1 u_{11} + b_2 u_{21}) (D_0 u_{11}) \\ &\quad + v_2 (D_0 u_{21}) - 2 v_1 (D_0 u_{11}) \} \\ &\quad - 2 D_0 D_1 u_{11} \\ D_0^2 u_{22} - \gamma_2 u_{12} + \omega_2^2 u_{22} &= -\mu \{ 2(a_1 u_{11} + a_2 u_{21}) (D_0 u_{11}) \\ &\quad + (b_1 u_{11} + b_2 u_{21}) (D_0 u_{21}) \\ &\quad + v_1 (D_0 u_{21}) + 2 v_2 (D_0 u_{11}) \} \\ &\quad - 2 D_0 D_1 u_{21} \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

A solução de (2.19) toma a forma:

$$\left. \begin{aligned} u_{11} &= \{A_1^* (T_1) e^{j \Omega_1 T_0} + A_2^* (T_1) e^{j \Omega_2 T_0}\} + cc \\ u_{21} &= \{\Lambda_1 A_1^* (T_1) e^{j \Omega_1 T_0} + \Lambda_2 A_2^* (T_1) e^{j \Omega_2 T_0}\} + cc \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

onde:

A_n^* e Λ_n ; ($n = 1, 2$) são em geral quantidades complexas e cc é o complexo conjugado da quantidade anterior.

Substituindo (2.21) em (2.19) e simplificando, obtemos a seguinte equação característica:

$$\Omega^4 - (\omega_1^2 + \omega_2^2) \Omega^2 + (\omega_1^2 \omega_2^2 - \gamma_1 \gamma_2) = 0 \quad (2.22a)$$

a qual fornece

$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \{(\omega_1^2 + \omega_2^2) \pm \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4 \gamma_1 \gamma_2}\} \quad (2.22b)$$

$$\Lambda_n = \frac{\omega_1^2 - \Omega_n^2}{\gamma_1} = \frac{\gamma_2}{\omega_2^2 - \Omega_n^2} ; \quad n = 1, 2$$

válido para

$$\gamma_1 \neq 0 \quad e \quad \gamma_2 \neq 0 \quad (2.22c)$$

Substituindo (2.21) em (2.20) obtemos:

$$D_0^2 u_{12} - \gamma_1 u_{22} + \omega_1^2 u_{12} =$$

$$\begin{aligned}
 j < \left[-2 A_1^{*'} - \mu (2 v_1 - v_2 \Lambda_1) A_1^* \right] \Omega_1 e^{j \Omega_1 T_0} \\
 + \left[-2 A_2^{*'} - \mu (2 v_1 - v_2 \Lambda_2) A_2^* \right] \Omega_2 e^{j \Omega_2 T_0} \\
 + \left[\Lambda_1 (a_1 + a_2 \Lambda_1) - 2 (b_1 + b_2 \Lambda_1) \right] \mu A_1^{*2} \Omega_1 e^{j 2 \Omega_1 T_0} \\
 + \left[\Lambda_2 (a_1 + a_2 \Lambda_2) - 2 (b_1 + b_2 \Lambda_2) \right] \mu A_2^{*2} \Omega_2 e^{j 2 \Omega_2 T_0} \\
 + \left[-\Omega_1 \{ \bar{\Lambda}_1 (a_1 + a_2 \Lambda_2) - 2 (b_1 + b_2 \Lambda_2) \} \right. \\
 \left. + \Omega_2 \{ \Lambda_2 (a_1 + a_2 \bar{\Lambda}_1) - 2 (b_1 + b_2 \bar{\Lambda}_1) \} \right] \mu \bar{A}_1^* A_2^* e^{j (\Omega_2 - \Omega_1) T_0} > \\
 + \text{termos que não contribuem}
 \end{aligned}
 \tag{2.23}$$

e

$$D_0^2 u_{22} - \gamma_2 u_{12} + \omega_2^2 u_{22} =$$

$$\begin{aligned}
 j < \left[-2 \Lambda_1 A_1^{*'} - \mu (2 v_2 + v_1 \Lambda_1) A_1^* \right] \Omega_1 e^{j \Omega_1 T_0} \\
 + \left[-2 \Lambda_2 A_2^{*'} - \mu (2 v_2 + v_1 \Lambda_2) A_2^* \right] \Omega_2 e^{j \Omega_2 T_0} \\
 + \left[-2 (a_1 + a_2 \Lambda_1) - \Lambda_1 (b_1 + b_2 \Lambda_1) \right] \mu A_1^{*2} \Omega_1 e^{j 2 \Omega_1 T_0} \\
 + \left[-2 (a_1 + a_2 \Lambda_2) - \Lambda_2 (b_1 + b_2 \Lambda_2) \right] \mu A_2^{*2} \Omega_2 e^{j 2 \Omega_2 T_0} \\
 + \left[\Omega_1 \{ 2 (a_1 + a_2 \Lambda_2) + \bar{\Lambda}_1 (b_1 + b_2 \Lambda_2) \} \right. \\
 \left. - \Omega_2 \{ 2 (a_1 + a_2 \bar{\Lambda}_1) + \Lambda_2 (b_1 + b_2 \bar{\Lambda}_1) \} \right] \mu \bar{A}_1^* A_2^* e^{j (\Omega_2 - \Omega_1) T_0} > \\
 + \text{termos que não contribuem}
 \end{aligned}
 \tag{2.24}$$

onde:

a' representa diferenciação em relação a T_1 e
 a - o complexo conjugado da quantidade.

2.5 - CONTORNOS DE ESTABILIDADE PARA O CASO NÃO RESSONANTE

No caso de Ω_2 não ser próximo de $2\Omega_1$ nem de $\frac{1}{2}\Omega_1$, procuramos uma solução particular para (2.23) e (2.24) da forma:

$$\begin{aligned} u_{12} &= P_{11} e^{j\Omega_1 T_0} + P_{12} e^{j\Omega_2 T_0} \\ u_{22} &= P_{21} e^{j\Omega_1 T_0} + P_{22} e^{j\Omega_2 T_0} \end{aligned} \quad (2.25)$$

o que implica que o sistema possui oscilações auto-sustentáveis, se a solução existe.

Substituindo (2.25) em (2.23) e (2.24), igualando os coeficientes de $e^{j\Omega_1 T_0}$ e $e^{j\Omega_2 T_0}$ em ambos os lados, temos:

$$\left. \begin{aligned} (\omega_1^2 - \Omega_n^2) P_{1n} + (-\gamma_1) P_{2n} &= j R_{1n}^* \\ (-\gamma_2) P_{1n} + (\omega_2^2 - \Omega_n^2) P_{2n} &= j R_{2n}^* \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

$$n = 1, 2$$

onde:

$$\left. \begin{aligned} R_{1n}^* &= \left[-2 A_n^{*'} - \mu (2 v_1 - v_2 \Lambda_n) A_n^* \right] \Omega_n \\ R_{2n}^* &= \left[-2 \Lambda_n A_n^{*'} - \mu (2 v_2 + v_1 \Lambda_n) A_n^* \right] \Omega_n \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

$$n = 1, 2$$

O determinante dos coeficientes de (2.26) é essencialmente idêntico a (2.22a). Consequentemente podemos escrever:

$$\begin{vmatrix} \omega_1^2 - \Omega_n^2 & j R_{1n}^* \\ -\gamma_2 & j R_{2n}^* \end{vmatrix} = 0 \quad (2.28a)$$

fornecendo

$$R_{1n}^* = - \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right) \Lambda_n R_{2n}^*$$

$$n = 1, 2$$

Usando (2.27), obtemos:

$$\tau_n A_n^{*'} + A_n^* = 0 \quad (2.28b)$$

$$n = 1, 2$$

onde:

$$\tau_n = \left(\frac{2}{\mu} \right) \left[\frac{\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right) \Lambda_n^2 + 1}{\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right) \Lambda_n (2 v_2 + v_1 \Lambda_n) + (2 v_1 - v_2 \Lambda_n)} \right] \quad (2.29)$$

$$n = 1, 2$$

válido para

$$\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right) \Lambda_n (2 \nu_2 + \nu_1 \Lambda_n) + (2 \nu_1 - \nu_2 \Lambda_n) \neq 0$$

$$n = 1, 2$$

Assim, o condutor móvel tenderá para sua posição de equilíbrio estável se, quando perturbado $\tau_n > 0$. Ele será instável se $\tau_n < 0$.

Os contornos separando os regimes estáveis dos instáveis são obtidos, igualando o numerador de (2.29) a zero. Isto implica em $\Lambda_1 = \Lambda_2$ ou $\Omega_1 = \Omega_2$. A equação (2.22b) fornece a condição:

$$(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4 \gamma_1 \gamma_2 = 0 \quad (2.30)$$

que pode ser escrita como:

$$x_0 = \left\{ \frac{-\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 + 4 \Gamma_* \mathcal{Q}}}{2 \Gamma_*} \right\} \quad (a)$$

onde

$$\Gamma_* = \frac{k^2 - 1}{W}, \quad \Gamma = \frac{B_3}{2} \quad (b)$$

$$\mathcal{Q} = (3 A_1 y_0^2 - A_2) \pm 2 y_0 \sqrt{(A_1 y_0^2 - A_2) (4 B_1 y_0^2 + 2 B_2)} \quad (c)$$

$$W = \mu \alpha \quad (d)$$

(2.31)

Para cada valor de y_0 , a equação (2.31c) fornece dois valores para \mathcal{Q} . Para uma dada velocidade do vento, podemos calcular Γ e Γ_* usando (2.31b).

A equação (2.31a) fornece quatro valores possíveis para x_0 . Esses valores de (x_0, y_0) fornecem os contornos que separam as regiões estáveis das instáveis.

Contornos típicos são mostrados na Figura 2.2.

Ao longo desses contornos, a frequência de oscilação Ω vale $\sqrt{1/2 (\omega_1^2 + \omega_2^2)}$, ou seja:

$$\Omega^2 = \frac{1}{2} \left[(1 + k^2) - \frac{1}{2x_0} (B_3 \sqrt{x_0} + 6 A_1 y_0^2 - 2 A_2) W \right] \quad (2.32)$$

dependendo das coordenadas espaciais e da velocidade de vento.

2.6 - OSCILAÇÕES AUTO-SUSTENTÁVEIS PARA O CASO NÃO RESSONANTE

Oscilações auto-sustentáveis, $A_n^* = \text{cte}$, podem ocorrer se $\frac{1}{\tau_n} = 0$. O denominador de (2.29) é então igualado a zero, onde obtemos as seguintes condições:

$$\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right) \Lambda_n (2 \nu_2 + \nu_1 \Lambda_n) + (2 \nu_1 - \nu_2 \Lambda_n) = 0 \quad (2.33)$$

Existem quatro casos a serem examinados:

Caso 1:

$$\nu_1 \neq 0 \quad \text{e} \quad \nu_2 \neq 0$$

Isto implica em $x_* \neq 0$ e $y_* \neq 0$

As equações (2.33) podem ser escritas:

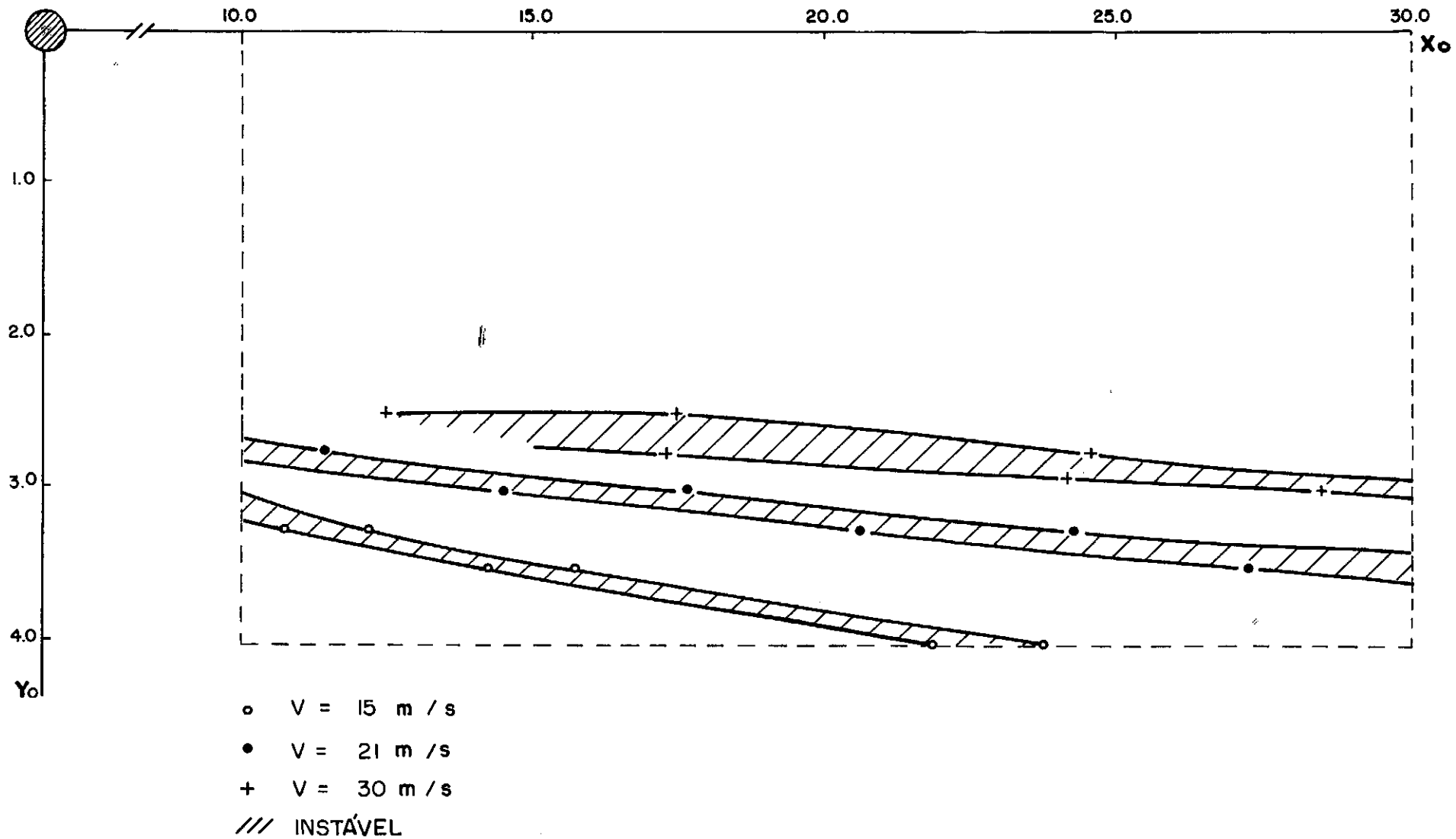


FIGURA 2.2 - CONTORNOS DE ESTABILIDADE

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right) \Lambda_1^2 + 2 & (2 \frac{\gamma_1}{\gamma_2} - 1) \Lambda_1 \\ \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right) \Lambda_2^2 + 2 & (2 \frac{\gamma_1}{\gamma_2} - 1) \Lambda_2 \end{vmatrix} = 0$$

podendo ser satisfeito por qualquer das três relações:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right) \Lambda_1 \Lambda_2 &= 2 \\ \Lambda_1 &= \Lambda_2 \\ 2 \gamma_1 &= \gamma_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

A primeira relação em (2.34) pode ser eliminada, pois implica em $\gamma_1 \gamma_2 = 0$, contradizendo a condição (2.22c).

A segunda relação fornece os contornos (2.31) e frequências (2.32). Isto pode ser interpretado como o lugar de todos os pontos no plano $X - Y$ associado a oscilações auto-sustentáveis, para uma particular velocidade do vento. Em outras palavras, cada ponto neste caso, é associado a uma velocidade crítica do vento V_c , a qual provoca oscilações auto-sustentáveis. Esta velocidade crítica é dada por:

$$V_c = \sqrt{\frac{k^2 - 1}{a_2 - b_1 \pm 2 \sqrt{-a_1 b_2}}} \quad (2.35)$$

A última relação em (2.34) implica em

$$2 b_2 = a_1$$

fornecendo por sua vez

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= 0 \\ x_0 &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A_2 - A_1 y_0^2}{B_2 + 2 B_1 y_0^2}} \end{aligned} \right\} \quad (2.36)$$

As curvas (2.36) representam o lugar de todos os pontos com oscilações auto-sustentáveis que não dependem de uma específica velocidade crítica. Contudo, a frequência de oscilação ao longo destas curvas, é dependente tanto das coordenadas espaciais como da velocidade do vento obtida por (2.22b).

Deve ser enfatizado, que as oscilações sobre as curvas (2.36), para todas as velocidades do vento, só serão possíveis se $v_1 \neq 0$ e $v_2 \neq 0$.

Curva típica é dada na Figura 2.3, mostrando o lugar de todos os pontos com oscilações auto-sustentáveis, independentes da intensidade da velocidade do vento.

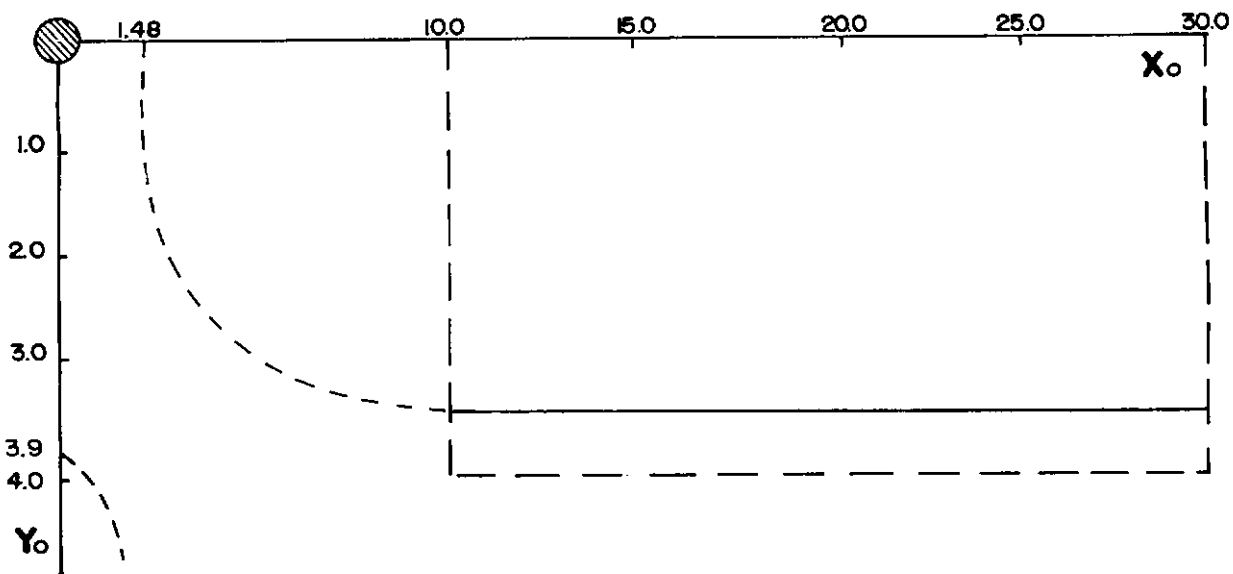


FIGURA 2.3 - LUGAR DOS PONTOS QUE INDEPENDEM DE UMA DETERMINADA VELOCIDADE CRÍTICA DO VENTO

Caso 2:

$$v_1 = 0 \quad \text{e} \quad v_2 \neq 0$$

As equações (2.23) fornecem a condição

$$2 \gamma_1 = \gamma_2$$

significando oscilações auto-sustentáveis ao longo das curvas (2.36). Mas, neste caso, cada ponto sobre a curva é associado a uma velocidade crítica do vento V_c dada por:

$$V_c = k \sqrt{\frac{b_o}{b_o a_2 - a_o b_2}} \quad (2.37)$$

obtida da equação $v_1 = 0$.

Caso 3

$$v_1 \neq 0 \quad \text{e} \quad v_2 = 0$$

As equações (2.33) fornecem a condição

$$\Lambda_1 = \Lambda_2$$

significando oscilações auto-sustentáveis para pontos sobre as curvas de contorno (2.31), onde a velocidade crítica V_c é dada por:

$$V_c = \sqrt{\frac{a_o}{a_o b_1 - b_o a_1}} \quad (2.38)$$

obtida da equação $v_2 = 0$.

Caso 4

$$v_1 = 0 \quad \text{e} \quad v_2 = 0$$

Combinando as relações (2.37) e (2.38) obtemos os contornos no plano $X - Y$ dados por:

$$b_o k^2 [a_o b_1 - b_o a_1] - a_o [b_o a_2 - a_o b_2] = 0 \quad (2.39)$$

os quais estão associados a velocidades críticas definidas por (2.37) e (2.38).

A Figura 2.4 mostra curvas típicas para pontos excitados por uma dada velocidade crítica do vento. Os seguintes dados foram usados para o caso não ressonante:

$$m = 3,13 \text{ kg} ; \quad = 0,91 \text{ m} ; \quad d = 0,04 \text{ m} ; \quad \omega_x = 6,91 \text{ rd/s} ; \\ \omega_y = 7,23 \text{ rd/s} ; \quad \rho = 1,225 \text{ kg/m}^3 .$$

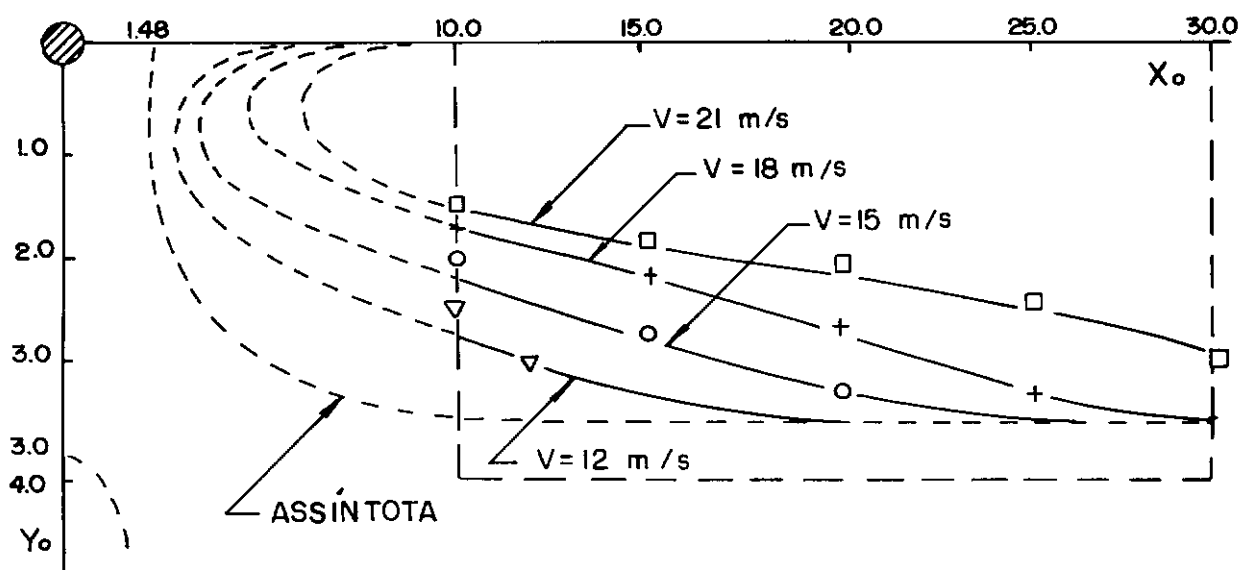


FIGURA 2.4 - PONTOS EXCITADOS POR UMA DADA VELOCIDADE CRÍTICA

Um enfoque diferente pode ser usado para definir as velocidades críticas em cada ponto do campo de estudo. Isto está detalhado no Apêndice C.

2.7 - CASO RESSONANTE ($\Omega_2 \approx 2 \Omega_1$)

Introduzindo um fator de dessincronia σ , tal que

$$\Omega_2 = 2 \Omega_1 + \epsilon \sigma$$

podemos escrever:

$$\left. \begin{aligned} 2 \Omega_1 T_0 &= \Omega_2 T_0 - \sigma \epsilon T_0 = \Omega_2 T_0 - \sigma T_1 \\ (\Omega_2 - \Omega_1) T_0 &= (\Omega_1 + \epsilon \tau) T_0 = \Omega_1 T_0 + \sigma T_1 \end{aligned} \right\} \quad (2.40)$$

Procuramos uma solução particular para (2.23) e (2.24) da forma dada por (2.25).

Seguindo o mesmo procedimento apresentado na seção anterior, podemos mostrar que A_1^* e A_2^* das equações (2.21) são, neste caso, dadas por:

$$\boxed{\begin{aligned} A_1^{*'} + \Gamma_1 A_1^* &= S_1 \bar{A}_1^* A_2^* e^{j \sigma T_1} \\ A_2^{*'} + \Gamma_2 A_2^* &= S_2 A_1^{*2} e^{-j \sigma T_1} \end{aligned}} \quad (2.41)$$

onde:

$$\rho_{11} = \mu (2 v_1 - v_2 \Lambda_1) \quad ; \quad \rho_{12} = \mu (2 v_1 - v_2 \Lambda_2)$$

$$\rho_{21} = \mu (2 v_2 + v_1 \Lambda_1) \quad ; \quad \rho_{22} = \mu (2 v_2 + v_1 \Lambda_2)$$

$$\alpha_1 = \mu (a_1 + a_2 \Lambda_1) \quad ; \quad \alpha_2 = \mu (a_1 + a_2 \Lambda_2)$$

$$\beta_1 = \mu (b_1 + b_2 \Lambda_1) \quad ; \quad \beta_2 = \mu (b_1 + b_2 \Lambda_2)$$

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\rho_{11} + \Lambda_1 \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right) \rho_{21}}{1 + \Lambda_1^2 \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)} \right\} \quad ; \quad \Gamma_2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\rho_{12} + \Lambda_2 \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right) \rho_{22}}{1 + \Lambda_2^2 \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)} \right\}$$

$$S_1 = \frac{1}{2 \left[1 + \Lambda_1^2 \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right) \right]} \left\{ \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right) \Lambda_1 \left[(2 \alpha_2 + \beta_2 \Lambda_1) - \frac{\Omega_2}{\Omega_1} (2 \alpha_1 + \beta_1 \Lambda_2) \right] + \left[(2 \beta_2 - \alpha_2 \Lambda_2) - \frac{\Omega_2}{\Omega_1} (2 \beta_1 - \alpha_1 \Lambda_2) \right] \right\}$$

$$S_2 = - \frac{\Omega_1}{2 \Omega_2 \left[1 + \Lambda_2^2 \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right) \right]} \left\{ \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right) \Lambda_2 (2 \alpha_1 + \beta_1 \Lambda_1) + (2 \beta_1 - \alpha_1 \Lambda_1) \right\}$$

(2.42)

A solução das equações (2.41) pode ser escrita na forma:

$$A_1^* = \frac{1}{2} p_1 e^{j \theta_1} \quad ; \quad A_2^* = \frac{1}{2} p_2 e^{j \theta_2} \quad (2.43)$$

onde:

p_1 , p_2 , θ_1 e θ_2 são funções reais dependentes de T_1 .
Substituindo (2.43) em (2.41) e ordenando os termos, temos:

$$\left. \begin{aligned} p_1' + \Gamma_1 p_1 &= \frac{1}{2} S_1 p_1 p_2 \cos \gamma_* \\ p_2' + \Gamma_2 p_2 &= \frac{1}{2} S_2 p_1^2 \cos \gamma_* \\ \gamma_*' &= - \left[\frac{1}{2} S_2 \frac{p_1^2}{p_2} + S_1 p_2 \right] \sin \gamma_* + \sigma \end{aligned} \right\} \quad (2.44)$$

onde:

$$\gamma_* = \theta_2 - 2 \theta_1 + \sigma T_1$$

Quando as condições de regime permanente prevalecem, podemos escrever:

$$p_1' = 0 \quad , \quad p_2' = 0 \quad \text{e} \quad \gamma_*' \approx 0$$

As relações anteriores ficam:

$$\begin{aligned}
 \cos (\gamma_*)_S &= \frac{\pm (\Gamma_2 + 2 \Gamma_1)}{\sqrt{(\Gamma_2 + 2 \Gamma_1)^2 + \sigma^2}} \\
 (p_1)_S &= \frac{2}{\cos (\gamma_*)_S} \sqrt{\frac{\Gamma_2 \Gamma_1}{S_1 S_2}} \\
 (p_2)_S &= \frac{2 \Gamma_1}{S_1 \cos (\gamma_*)_S}
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

As equações acima fornecem as amplitudes dos ciclos limite, somente para o caso ressonante $\Omega_2 \approx 2 \Omega_1$.

Usando o fato que $\Omega_2 \approx 2 \Omega_1$ e as equações (2.22), obtemos:

$$r_1 W^2 + r_2 W + r_3 = 0$$

onde:

$$\left. \begin{aligned}
 r_1 &= 4 b_1^2 - 17 b_1 a_2 + 4 a_2^2 + 25 a_1 b_2 \\
 r_2 &= 17 (a_2 + b_1 k^2) - 8 (b_1 + k^2 a_2) \\
 r_3 &= 4 - 17 k^2 + 4 k^4
 \end{aligned} \right\} \tag{2.46}$$

Significando que para cada ponto (x_0, y_0) , na região em estudo, podemos definir uma triade (r_1, r_2, r_3) , e consequentemente um polinômio em W . Se W é real e positivo, então existe uma velocidade crítica V^* do vento neste ponto, a qual induz um ciclo limite com raios dados por (2.45). Neste

caso, a frequência é obtida de (2.22).

O segundo caso ressonante $\Omega_2 \approx \frac{1}{2} \Omega_1$ é idêntico ao primeiro ($\Omega_2 \approx 2 \Omega_1$) em todos os aspectos. Para demonstrar isso, basta usar o fato que $\Omega_2 \approx \frac{1}{2} \Omega_1$ e as relações (2.22). Assim, podemos mostrar que a relação (2.46) é também válida para este caso.

2.8 - ESTABILIDADE DOS CICLOS-LIMITE PARA O CASO RESSONANTE

Devido a identidade entre os dois tipos possíveis de ressonancia interna, o estudo da estabilidade dos ciclos limite será feito usando-se as equações (2.44).

As soluções estacionárias das soluções periódicas em (2.44), correspondem a fazer $p_1' = p_2' = \gamma_*' = 0$, cujas expressões são dadas por (2.45).

A estabilidade dessas oscilações pode ser obtida fazendo-se:

$$p_1 = (p_1)_S + \Delta p_1$$

$$p_2 = (p_2)_S + \Delta p_2$$

$$\gamma_* = (\gamma_*)_S + \Delta \gamma_*$$

Desenvolvendo-se (2.44) em potências de Δp_1 , Δp_2 , $\Delta \gamma_*$ e tomando somente os termos lineares, temos:

$$\left[\begin{array}{c} \Delta p'_1 \\ \Delta p'_2 \\ \Delta \gamma_* \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ \Delta \gamma_* \end{array} \right] \quad (2.47)$$

onde :

$$p_{11} = -\Gamma_1 + \frac{1}{2} S_1 (p_2)_S \left[1 - \frac{1}{2} (\gamma_*)^2_S \right]$$

$$p_{12} = \frac{1}{2} S_1 (p_1)_S \left[1 - \frac{1}{2} (\gamma_*)^2_S \right]$$

$$p_{13} = -\frac{1}{2} S_1 (p_1)_S (p_2)_S (\gamma_*)_S$$

$$p_{21} = S_2 (p_1)_S \left[1 - \frac{1}{2} (\gamma_*)^2_S \right]$$

$$p_{22} = -\Gamma_2$$

$$p_{23} = -\frac{1}{2} S_2 (p_1)^2_S (\gamma_*)_S$$

$$p_{31} = -S_2 \frac{(p_1)_S}{(p_2)_S} (\gamma_*)_S \left[1 - \frac{1}{6} (\gamma_*)^2_S \right]$$

$$p_{32} = - \left[-\frac{1}{2} S_2 \frac{(p_1)^2_S}{(p_2)^2_S} + S_1 \right] \left[1 - \frac{1}{6} (\gamma_*)^2_S \right] (\gamma_*)_S$$

$$p_{33} = - \left[\frac{1}{2} S_2 \frac{(p_1)^2_S}{(p_2)^2_S} + S_1 (p_2)_S \right] \left[1 - \frac{1}{2} (\gamma_*)^2_S \right]$$

Para a estabilidade dos ciclos limite, basta que os auto-valores da matriz quadrada em (2.47), estejam do lado esquerdo do plano complexo.

A Figura 2.5 mostra contornos típicos de pontos que têm ciclos limite estáveis, para velocidades críticas especificadas. A estabilidade foi testada para o seguinte sistema:

$$m = 3,13 \text{ kg} ; \ell = 0,91 \text{ m} ; d = 0,04 \text{ m} ; \omega_x = 6,91 \text{ rd/s}$$

$$\omega_y = 13,82 \text{ rd/s} ; \rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$$

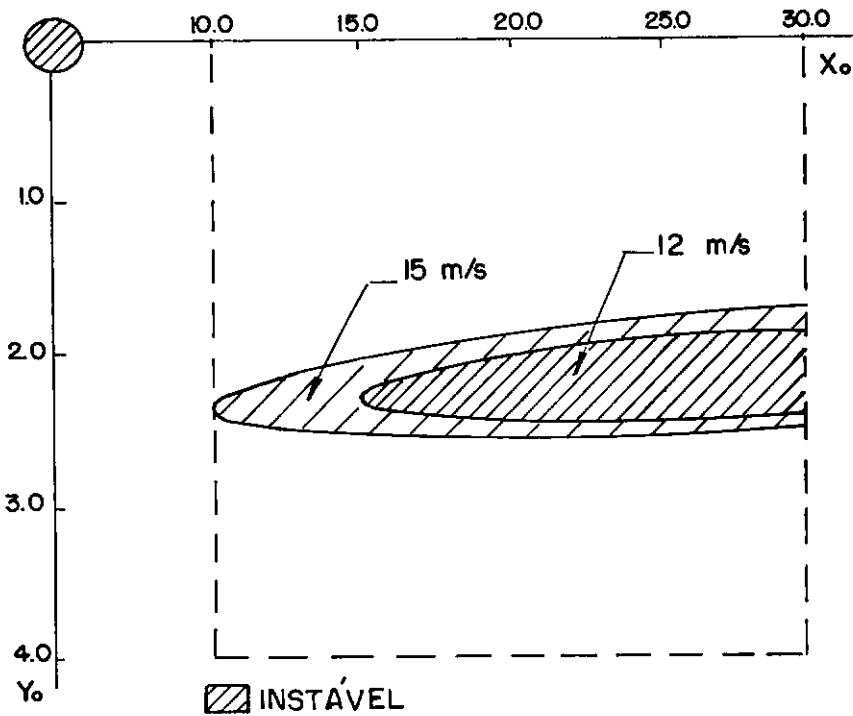


FIGURA 2.5 - CONTORNOS TÍPICOS DE PONTOS QUE TÊM CICLOS LIMITE ESTÁVEIS PARA VELOCIDADES CRÍTICAS ESPECIFICADAS

2.9 - MÉTODO ALTERNATIVO PARA A SOLUÇÃO DO MODELO NÃO LINEAR SIMPLIFICADO

Um método alternativo para se estudar o modelo (2.15), é o de Krylov e Bogoliubov. Para tanto, basta definir as seguintes funções:

$$f(u_1, u_2, u'_1, u'_2) = (a_1 u_1 + a_2 u_2) u'_2 - 2(b_1 u_1 + b_2 u_2) u'_1 \\ + \hat{v}_2 u'_2 - 2 \hat{v}_1 u'_1$$

$$g(u_1, u_2, u'_1, u'_2) = 2(a_1 u_1 + a_2 u_2) u'_1 + (b_1 u_1 + b_2 u_2) u'_2 \\ + \hat{v}_1 u'_2 + 2 v_2 u'_1$$

A equação (2.15) pode ser escrita como se segue:

$$\left. \begin{aligned} u''_1 - \gamma_1 u_2 + \omega_1^2 u_1 &= \mu f(u_1, u_2, u'_1, u'_2) \\ u''_2 - \gamma_2 u_1 + \omega_2^2 u_2 &= -\mu g(u_1, u_2, u'_1, u'_2) \end{aligned} \right\} \quad (2.49)$$

Procuramos para o sistema acima, uma solução da forma:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= A_1^*(\tau) \sin [\Omega_1 \tau + \beta_1(\tau)] + A_2^*(\tau) \sin [\Omega_2 \tau + \beta_2(\tau)] \\ u_2 &= \Lambda_1 A_1^*(\tau) \sin [\Omega_1 \tau + \beta_1(\tau)] + \Lambda_2 A_2^*(\tau) \sin [\Omega_2 \tau + \beta_2(\tau)] \end{aligned} \right\} \quad (2.50)$$

onde :

Ω_1 , Ω_2 , Λ_1 e Λ_2 são os mesmos definidos por (2.22) e

A_1^* , A_2^* , β_1 e β_2 são funções desconhecidas de τ

Chamando

$$\psi_1 = \Omega_1 \tau + \beta_1 \quad (2.51)$$

$$\psi_2 = \Omega_2 \tau + \beta_2$$

podemos diferenciar (2.50) em relação a τ e obter:

$$u_1' = A_1^* \Omega_1 \cos \psi_1 + A_2^* \Omega_2 \cos \psi_2 \quad (2.52)$$

$$u_2' = \Lambda_1 A_1^* \Omega_1 \cos \psi_1 + \Lambda_2 A_2^* \Omega_2 \cos \psi_2$$

com as seguintes equações complementares:

$$A_1^{*'} \sin \psi_1 + A_2^{*'} \sin \psi_2 + A_1^* \beta_1' \cos \psi_1 + A_2^* \beta_2' \cos \psi_2 = 0 \quad (2.53)$$

$$\Lambda_1 A_1^{*'} \sin \psi_1 + \Lambda_2 A_2^{*'} \sin \psi_2 + \Lambda_1 A_1^* \beta_1' \cos \psi_1 + \Lambda_2 A_2^* \beta_2' \cos \psi_2 = 0$$

Diferenciando (2.52), substitutindo em (2.49) e usando (2.22), obtemos as seguintes relações:

$$\left. \begin{aligned}
 & \left[A_1^{*'} \quad \Omega_1 \right] \cos \psi_1 + \left[A_2^{*'} \quad \Omega_2 \right] \cos \psi_2 - \left[A_1 \quad \Omega_1 \quad \beta_1' \right] \sin \psi_1 \\
 & - \left[A_2^* \quad \Omega_2 \quad \beta_2' \right] \sin \psi_2 = \mu f^* \\
 & \left[\Lambda_1 \quad A_1^{*'} \quad \Omega_1 \right] \cos \psi_1 + \left[\Lambda_2 \quad A_2^{*'} \quad \Omega_2 \right] \cos \psi_2 - \left[\Lambda_1 \quad A_1^* \quad \Omega_1 \quad \beta_1' \right] \sin \psi_1 \\
 & - \left[\Lambda_2 \quad A_2^* \quad \Omega_2 \quad \beta_2' \right] \sin \psi_2 = - \mu g^*
 \end{aligned} \right\}$$

(2.54)

onde

$$f^* = f(A_1^* \sin \psi_1 + A_2^* \sin \psi_2, A_1^* \Omega_1 \cos \psi_1 + A_2^* \Omega_2 \cos \psi_2,$$

$$\Lambda_1 A_1^* \sin \psi_1 + \Lambda_2 A_2^* \sin \psi_2, \Lambda_1 A_1^* \Omega_1 \cos \psi_1 + \Lambda_2 A_2^* \Omega_2 \cos \psi_2)$$

$$g^* = g(A_1^* \sin \psi_1 + A_2^* \sin \psi_2, A_1^* \Omega_1 \cos \psi_1 + A_2^* \Omega_2 \cos \psi_2,$$

$$\Lambda_1 A_1^* \sin \psi_1 + \Lambda_2 A_2^* \sin \psi_2, \Lambda_1 A_1^* \Omega_1 \cos \psi_1 + \Lambda_2 A_2^* \Omega_2 \cos \psi_2)$$

(2.55)

As equações (2.53) e (2.54) podem ser escritas na seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} S_1 & S_2 & C_1 & C_2 \\ \Lambda_1 S_1 & \Lambda_2 S_2 & \Lambda_1 C_1 & \Lambda_2 C_2 \\ \Omega_1 C_1 & \Omega_2 C_2 & -\Omega_1 S_1 & -\Omega_2 S_2 \\ \Lambda_1 \Omega_1 C_1 & \Lambda_2 \Omega_2 C_2 & -\Lambda_1 \Omega_1 S_1 & -\Lambda_2 \Omega_2 S_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1^{*'} \\ A_2^{*'} \\ A_1^* \beta_1' \\ A_2^* \beta_2' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu f^* \\ -\mu g^* \end{Bmatrix}$$

onde adotamos as seguintes abreviações:

$$S_1 = \text{sen } \psi_1, \quad S_2 = \text{sen } \psi_2, \quad C_1 = \text{cos } \psi_1, \quad C_2 = \text{cos } \psi_2$$

O determinante da matriz quadrada da equação anterior, vale:

$$\Delta = \Omega_1 \Omega_2 (\Lambda_2 - \Lambda_1)^2$$

Para $\Delta \neq 0$, ou seja, $\Lambda_1 \neq \Lambda_2$, a solução da equação nos dá:

$$\left. \begin{aligned} A_1^{*'} &= \frac{\mu \gamma_1}{\Omega_1 (\Omega_1^2 - \Omega_2^2)} \{g^* + \Lambda_2 f^*\} \cos \psi_1 \\ A_2^{*'} &= \frac{-\mu \gamma_1}{\Omega_2 (\Omega_1^2 - \Omega_2^2)} \{g^* + \Lambda_1 f^*\} \cos \psi_2 \\ A_1^* \beta_1' &= \frac{-\mu \gamma_1}{\Omega_1 (\Omega_1^2 - \Omega_2^2)} \{g^* + \Lambda_2 f^*\} \text{sen } \psi_1 \\ A_2^* \beta_2' &= \frac{\mu \gamma_1}{\Omega_2 (\Omega_1^2 - \Omega_2^2)} \{g^* + \Lambda_1 f^*\} \text{sen } \psi_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.56)$$

Para um comportamento próximo do linear ($\mu \rightarrow 0$), podemos definir as seguintes funções:

$$\left. \begin{aligned}
 (F_1, G_1) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (f^*, g^*) \cos \psi_1 d\psi_1 d\psi_2 \\
 (F_2, G_2) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (f^*, g^*) \cos \psi_2 d\psi_1 d\psi_2 \\
 (F_3, G_3) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (f^*, g^*) \sin \psi_1 d\psi_1 d\psi_2 \\
 (F_4, G_4) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (f^*, g^*) \sin \psi_2 d\psi_1 d\psi_2
 \end{aligned} \right\} \quad (2.57)$$

Podemos então escrever:

$$\left. \begin{aligned}
 A_1^{*'} &= \frac{\mu \gamma_1}{\Omega_1 (\Omega_1^2 - \Omega_2^2)} [G_1 + \Lambda_2 F_1] \\
 A_2^{*'} &= \frac{-\mu \gamma_1}{\Omega_2 (\Omega_1^2 - \Omega_2^2)} [G_2 + \Lambda_1 F_2] \\
 A_1^* \beta_1' &= \frac{-\mu \gamma_1}{\Omega_1 (\Omega_1^2 - \Omega_2^2)} [G_3 + \Lambda_2 F_3] \\
 A_2^* \beta_2' &= \frac{\mu \gamma_1}{\Omega_2 (\Omega_1^2 - \Omega_2^2)} [G_4 + \Lambda_1 F_4]
 \end{aligned} \right\} \quad (2.58)$$

Para Ω_1 não próximo de $2\Omega_2$ ou $\frac{1}{2}\Omega_1$, podemos mostrar que:

$$F_1 = (\hat{v}_2 \Lambda_1 - 2 \hat{v}_1) \Omega_1 A_1^* ; F_2 = (\hat{v}_2 \Lambda_2 - 2 \hat{v}_1) \Omega_2 A_2^*$$

$$G_1 = (\hat{v}_1 \Lambda_1 + 2 v_2) \Omega_1 A_1^* ; G_2 = (\hat{v}_1 \Lambda_2 + 2 \hat{v}_2) \Omega_2 A_2^*$$

$$F_3 = F_4 = G_3 = G_4 = 0$$

As equações (2.58) tomam a seguinte forma:

$$\tau_1 A_1^{*'} + A_1^* = 0 ; \tau_2 A_2^{*'} + A_2^* = 0$$

$$\beta_1' = 0 ; \beta_2' = 0$$

onde:

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{-(\Omega_1^2 - \Omega_2^2)}{\mu \gamma_1 \{ \hat{v}_1 (\Lambda_1 - 2 \Lambda_2) + \hat{v}_2 (2 + \Lambda_1 \Lambda_2) \}} \\ \tau_2 &= \frac{(\Omega_1^2 - \Omega_2^2)}{\mu \gamma_1 \{ \hat{v}_2 (\Lambda_2 - 2 \Lambda_1) + \hat{v}_1 (2 + \Lambda_1 \Lambda_2) \}} \end{aligned} \right\} \quad (2.59)$$

Podemos mostrar que as relações acima são idênticas a (2.29), que foram obtidas usando o método das múltiplas escalas de tempo.

Para oscilações auto-sustentáveis fazemos:

$$\frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{\tau_2} = 0$$

para obter:

$$\begin{bmatrix} \Lambda_1 - 2 \Lambda_2 & 2 + \Lambda_1 \Lambda_2 \\ \Lambda_2 - 2 \Lambda_1 & 2 + \Lambda_1 \Lambda_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.60)$$

Para solução não trivial, o determinante da matriz quadrada deve ser nulo, fornecendo as seguintes relações:

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_1 &= \Lambda_2 \\ 2 + \Lambda_1 \Lambda_2 &= \gamma_1 (2 \gamma_1 - \gamma_2) \end{aligned} \right\} \quad (2.61)$$

Estes resultados são idênticos aos obtidos em (2.34). Para o caso $\hat{v}_1 = 0$ e $\hat{v}_2 \neq 0$, obtemos de (2.60) a seguinte equação:

$$2 + \Lambda_1 \Lambda_2 = \gamma_1 (2 \gamma_1 - \gamma_2) = 0$$

como foi previsto em (2.37).

Para o caso $\hat{v}_1 \neq 0$ e $\hat{v}_2 = 0$, as relações em (2.60) implicam em

$$\Lambda_1 = \Lambda_2$$

como foi previsto em (2.38)

Concluimos então, que o método de Krylov e Bogoliubov prevê idênticos resultados para o caso não ressonante, tal qual o método das múltiplas escalas de tempo.

2.10 - COMENTÁRIOS

Em resumo, podemos fazer as seguintes observações :

- a) O modelo não linear simplificado, foi tratado por dois métodos diferentes, "o das múltiplas escalas de tempo" e "o de Krylov e Bogoliubov". Os resultados são idênticos.
- b) No modelo simplificado, foram retidos somente os termos lineares das expansões em série de Taylor para C_L e C_D . Apesar desta simplificação, o modelo continua sendo não linear. Isto foi intencionalmente feito, para simplificar a análise não linear neste Capítulo.
- c) Os estudos conduzidos com o modelo não linear simplificado, revelaram os seguintes resultados, na esteira do condutor fixo:
 - i) Para uma dada velocidade do vento, existe uma região de instabilidade, onde as amplitudes somente serão limitadas, pelas restrições mecânicas do sistema real. Estas restrições não foram levadas em conta no modelo.
 - ii) Para cada ponto da região de estudo, existe uma velocidade crítica do vento, a qual, pode induzir oscilações auto-sustentáveis.
- d) Em todos os casos, onde oscilações auto-sustentáveis são possíveis, podemos calcular a frequência associada.
- e) É possível prever as amplitudes dos ciclos limite em casos especiais (o caso ressonante). Entretanto, estes casos estão associados com velocidades do vento excepcionalmente elevadas, impossíveis de ocorrer em situação reais (quando $k = \frac{\omega_Y}{\omega_X}$ é próximo de 1).
- f) Os dois métodos empregados, não conseguem prever as amplitudes dos ciclos limite, no caso geral. Isto é atribuído ao fato do modelo não linear estudado, ter sido por demais simplificado. Deveremos incluir os termos de segunda ordem, das expansões em série de Taylor para C_L e C_D , a fim de tornar possível a obtenção daquelas amplitudes.

- g) As observações feitas em (f) implicam, que no caso geral, o sistema se comporta como um sistema não amortecido linear com oscilações cujas amplitudes dependem das condições iniciais.
- h) O modelo simplificado, fornece uma primeira visão aproximada, do que seja o comportamento não linear do sistema. Os estudos de estabilidade que foram conduzidos neste Capítulo, tinham o objetivo de avaliar a estabilidade da dinâmica do sistema. Isto é inteiramente diferente, dos estudos convencionais de estabilidade, normalmente feitos em problemas de "flütter", usando o critério de Routh-Hurwitz.
- i) As equações que governam o movimento do condutor, usadas neste capítulo, são as mais simples possíveis, com a característica de reter parte do caráter não linear do sistema. Apesar disto, foi possível prever a presença de oscilações auto-sustentáveis, e definir as condições para que elas ocorressem.

III - CICLOS-LIMITE

3.1 - MODELO COM NÃO LINEARIDADE CÚBICA

O modelo não linear simplificado, estudado no capítulo anterior, retendo somente os termos lineares das expansões em série de Taylor para C_L e C_D , não permite o cálculo das amplitudes dos ciclos limite, por ser excessivamente simplificado.

Expandindo agora C_L e C_D em torno de (x_0, y_0) e tomando até os termos de segunda ordem das expansões, podemos escrever:

$$C_L = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{4-j} a_{ij} x^{i-1} y^{j-1} \quad (3.1)$$

$$C_D = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{4-j} b_{ij} x^{i-1} y^{j-1}$$

onde os coeficientes a_{ij} e b_{ij} , são dados por:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{(A_1 y_0^3 - A_2 y_0)}{x_0} ; a_{21} = -\frac{a_{11}}{x_0} ; a_{12} = \frac{(3 A_1 y_0^2 - A_2)}{x_0} \\ a_{31} &= -\frac{a_{21}}{x_0} ; a_{22} = -\frac{a_{12}}{x_0} ; a_{13} = \frac{3 A_1 y_0}{x_0} \\ b_{11} &= B_1 y_0^4 + B_2 y_0^2 + B_3 \sqrt{x_0} + B_4 ; b_{21} = \frac{B_3}{2 \sqrt{x_0}} \\ b_{12} &= 4 B_1 y_0^3 + 2 B_2 y_0 ; b_{31} = -\frac{b_{21}}{4 x_0} ; b_{22} = 0 \\ b_{13} &= 6 B_1 y_0^2 + B_2 \end{aligned}$$

(3.2)

Para cada ponto (x_0, y_0) , os coeficientes de (3.1) podem ser calculados usando-se (3.2). O modelo (2.8), pode então ser escrito na seguinte forma:

$$\left. \begin{aligned} x'' + x &= \mu \left\{ y' \left(\sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{4-j} a_{ij} x^{i-1} y^{j-1} \right) \right. \\ &\quad \left. + (\alpha - 2x') \left(\sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{4-j} b_{ij} x^{i-1} y^{j-1} \right) \right\} \\ y'' + k^2 y &= \mu \left\{ (\alpha - 2x') \left(\sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{4-j} a_{ij} x^{i-1} y^{j-1} \right) \right. \\ &\quad \left. - y' \left(\sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{4-j} b_{ij} x^{i-j} y^{j-1} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Ao substituírmos (3.1) em (2.8), obtendo as equações (3.3), podemos verificar que elas contem termos independentes de x ou y . Para eliminar do modelo os termos constantes, adotamos a mesma transformação (2.13), onde x_* e y_* são constantes a serem determinadas.

Substituindo (2.13) em (3.3) e igualando os termos constantes a zero, obtemos:

$$\left. \begin{aligned} x_* &= \mu \alpha \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{4-j} b_{ij} x_*^{i-1} y_*^{j-1} \\ y_* &= \frac{\mu \alpha}{k^2} \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{4-j} a_{ij} x_*^{i-1} y_*^{j-1} \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

As equações (3.4) devem ser resolvidas iterativamente, usando como valores de partida as expressões (2.14).

O modelo matemático (3.3), toma então a seguinte

forma:

$$\begin{aligned} u_1'' - \gamma_1 u_2 + \omega_1^2 u_1 &= \mu g_1(u_1, u_2, u_1', u_2') \\ u_2'' - \gamma_2 u_1 + \omega_2^2 u_2 &= -\mu g_2(u_1, u_2, u_1', u_2') \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde:

$$\gamma_1 = \mu \alpha b_{12}^* \quad ; \quad \omega_1^2 = 1 - \mu \alpha b_{21}^*$$

$$\gamma_2 = \mu \alpha a_{21}^* \quad ; \quad \omega_2^2 = k^2 - \mu \alpha a_{12}^*$$

$$v_1 = \frac{x_*}{\mu \alpha} \quad ; \quad v_2 = \frac{k^2 y_*}{\mu \alpha}$$

$$a_{12}^* = a_{12} + a_{22} x_* + 2 a_{13} y_* \quad ; \quad a_{21}^* = a_{21} + 2 a_{31} x_* + a_{22} y_*$$

$$b_{12}^* = b_{12} + b_{22} x_* + 2 b_{13} y_* \quad ; \quad b_{21}^* = b_{21} + 2 b_{31} x_* + b_{22} y_*$$

$$\begin{aligned} g_1(u_1, u_2, u_1', u_2') &= u_2' \left[a_{21}^* u_1 + a_{12}^* u_2 + \sum_{i=1}^3 a_{4-i,i} u_1^{3-i} u_2^{i-1} \right] \\ &- 2 u_1' \left[b_{21}^* u_1 + b_{12}^* u_2 \right] + (\alpha - 2 u_1') \left(\sum_{i=1}^3 b_{4-i,i} u_1^{3-i} u_2^{i-1} \right) \\ &+ v_2 u_2' - 2 v_1 u_1' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_2(u_1, u_2, u_1', u_2') &= u_2' \left[b_{21}^* u_1 + b_{12}^* u_2 + \sum_{i=1}^3 b_{4-i,i} u_1^{3-i} u_2^{i-1} \right] \\ &+ 2 u_1' \left[a_{21}^* u_1 + a_{12}^* u_2 \right] - (\alpha - 2 u_1') \left(\sum_{i=1}^3 a_{4-i,i} u_1^{3-i} u_2^{i-1} \right) \\ &+ 2 v_2 u_1' + v_1 u_2' \end{aligned} \quad (3.6)$$

3.2 - APROXIMAÇÃO ASSINTÓTICA DE KRYLOV E BOGOLIUBOV

O comportamento linear do sistema não amortecido, pode ser estudado, eliminando-se as não-linearidades, os termos que produzem amortecimento e admitindo-se uma solução da forma:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \sum_{n=1}^2 R_n \operatorname{sen} (\Omega_n \tau + \beta_n) \\ u_2 &= \sum_{n=1}^2 \Lambda_n R_n \operatorname{sen} (\Omega_n \tau + \beta_n) \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Podemos mostrar que os valores de Ω e Λ são dados pelas equações (2.22b) e que as quantidades $(R_n, \Lambda_n, \Omega_n$ e $\beta_n)$ são tratadas como constantes desconhecidas.

Para o modelo não linear (3.5), procuramos uma solução da seguinte forma:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \sum_{n=1}^2 R_n (\tau) \operatorname{sen} \{\Omega_n \tau + \beta_n (\tau)\} \\ u_2 &= \sum_{n=1}^2 \Lambda_n R_n (\tau) \operatorname{sen} \{\Omega_n \tau + \beta_n (\tau)\} \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

onde Ω_n e Λ_n são os mesmos definidos em (2.22b) e R_n e β_n são agora considerados funções desconhecidas de τ .

Para simplificar a notação, introduziremos as seguintes variáveis:

$$\psi_n = \Omega_n \tau + \beta_n (\tau)$$

$$S_n = \operatorname{sen} (\psi_n) \quad ; \quad C_n = \cos (\psi_n) \quad n = 1, 2$$

Diferenciando (3.8) em relação a τ , obtemos:

$$\left. \begin{aligned} u'_1 &= \sum_{n=1}^2 R_n \Omega_n C_n \\ u'_2 &= \sum_{n=1}^2 \Lambda_n R_n \Omega_n C_n \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

onde as seguintes relações devem ser satisfeitas:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^2 (R'_n S_n + R_n \beta'_n C_n) &= 0 \\ \sum_{n=1}^2 \Lambda_n (R'_n S_n + R_n \beta'_n C_n) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Diferenciando (3.9) em relação a τ e substituindo em (3.5), obtemos as seguintes relações:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^2 (R'_n C_n - R_n \beta'_n S_n) \Omega_n &= \mu g_1^* \\ \sum_{n=1}^2 \Lambda_n (R'_n C_n - R_n \beta'_n S_n) \Omega_n &= -\mu g_2^* \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

onde:

$$g_k^* = g_k \left(\sum_{n=1}^2 R_n S_n, \sum_{n=1}^2 \Lambda_n R_n S_n, \sum_{n=1}^2 R_n \Omega_n C_n, \sum_{n=1}^2 \Lambda_n R_n \Omega_n C_n \right) \quad (3.12)$$

$k = 1, 2$

As equações (3.10) e (3.11) podem ser escritas na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix}
 S_1 & S_2 & C_1 & C_2 \\
 \Lambda_1 S_1 & \Lambda_2 S_2 & \Lambda_1 C_1 & \Lambda_2 C_2 \\
 \Omega_1 C_1 & \Omega_2 C_2 & -\Omega_1 S_1 & -\Omega_2 S_2 \\
 \Omega_1 \Lambda_1 C_1 & \Omega_2 \Lambda_2 C_2 & -\Omega_1 \Lambda_1 S_1 & -\Omega_2 \Lambda_2 S_2
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 R'_1 \\
 R'_2 \\
 R_1 \beta'_1 \\
 R_2 \beta'_2
 \end{Bmatrix} =
 \begin{Bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 \mu g_1^* \\
 -\mu g_2^*
 \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

O determinante Δ da matriz quadrada, é dado por:

$$\Delta = \Omega_1 \Omega_2 (\Lambda_2 - \Lambda_1)^2$$

Para $\Delta \neq 0$, ou seja, $\Lambda_1 \neq \Lambda_2$, o sistema de equações (3.13) fornece:

$$\left. \begin{aligned}
 R'_n &= \frac{\mu \gamma_1}{\Omega_n (\Omega_n^2 - \tilde{\Omega}_n^2)} \{g_2^* + \tilde{\Lambda}_n g_1^*\} C_n \\
 R_n \beta'_n &= \frac{-\mu \gamma_1}{\Omega_n (\Omega_n^2 - \tilde{\Omega}_n^2)} \{g_2^* + \tilde{\Lambda}_n g_1^*\} S_n
 \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

$$n = 1, 2$$

onde o $-$ é usado para identificar a contra parte de uma quantidade que tenha um par, isto é:

$$\tilde{\Omega}_1 = \Omega_2, \quad \tilde{\Omega}_2 = \Omega_1; \quad \tilde{\Lambda}_1 = \Lambda_2, \quad \dots, \text{etc}$$

Para um comportamento próximo do linear ($\mu \rightarrow 0$), podemos definir as seguintes funções:

$$P_{k,n} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g_k^* C_n d\psi_1 d\psi_2$$

$$Q_{k,n} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g_k^* S_n d\psi_1 d\psi_2$$

$$k = 1, 2$$

$$n = 1, 2$$

As integrais duplas podem ser calculadas, fornecendo:

$$\left. \begin{aligned} P_{1,n} &= \Omega_n R_n \{ (\nu_2 \Lambda_n - 2 \nu_1) + (\frac{1}{4} \Lambda_n \rho_n - \frac{1}{2} \sigma_n) R_n^2 \\ &\quad + (\frac{1}{2} \Lambda_n \tilde{\rho}_n - \tilde{\sigma}_n) \tilde{R}_n^2 \} \\ P_{2,n} &= \Omega_n R_n \{ (\nu_1 \Lambda_n + 2 \nu_2) + (\frac{1}{2} \rho_n + \frac{1}{4} \Lambda_n \sigma_n) R_n^2 \\ &\quad + (\tilde{\rho}_n + \frac{1}{2} \Lambda_n \tilde{\sigma}_n) \tilde{R}_n^2 \} \\ Q_{1,n} &= Q_{2,n} = 0 \quad ; \quad n = 1, 2 \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

onde:

$$\rho_n = \sum_{i=1}^3 a_{4-i,i} \Lambda_n^{i-1} \quad ; \quad \sigma_n = \sum_{i=1}^3 b_{4-i,i} \Lambda_n^{i-1} \quad (3.16)$$

$$\tilde{\rho}_n = \sum_{i=1}^3 a_{4-i,i} \tilde{\Lambda}_n^{i-1} \quad \tilde{\sigma}_n = \sum_{i=1}^3 b_{4-i,i} \tilde{\Lambda}_n^{i-1}$$

As equações (3.14) se simplificam, tomando a seguinte forma:

$$\left. \begin{aligned} R'_1 &= \frac{\mu \gamma_1}{\Omega_1 (\Omega_1^2 - \Omega_2^2)} \{P_{21} + \Lambda_2 P_{11}\} \\ R'_2 &= \frac{\mu \gamma_1}{\Omega_2 (\Omega_2^2 - \Omega_1^2)} \{P_{22} + \Lambda_1 P_{12}\} \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

as quais fornecem a base para a análise que se segue.

3.3 - AMPLITUDES DOS CICLOS-LIMITE

Se um ciclo limite existe, então R'_1 e R'_2 devem se anular simultaneamente, fornecendo as seguintes condições:

$$P_{21} + \Lambda_2 P_{11} = 0$$

$$P_{22} + \Lambda_1 P_{12} = 0$$

Usando (3.15), (3.16) e explicitando R_1 e R_2 , obtemos:

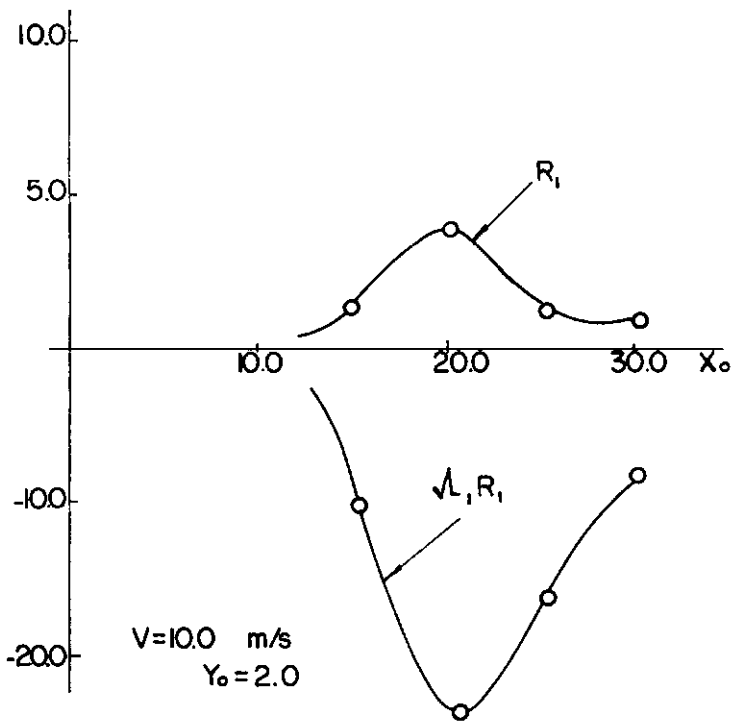
$$R_1 = \sqrt{\frac{\alpha_o \delta_2 - \delta_o \alpha_2}{\Delta_o}} \quad ; \quad R_2 = \sqrt{\frac{\delta_o \alpha_1 - \alpha_o \delta_1}{\Delta_o}}$$

onde:

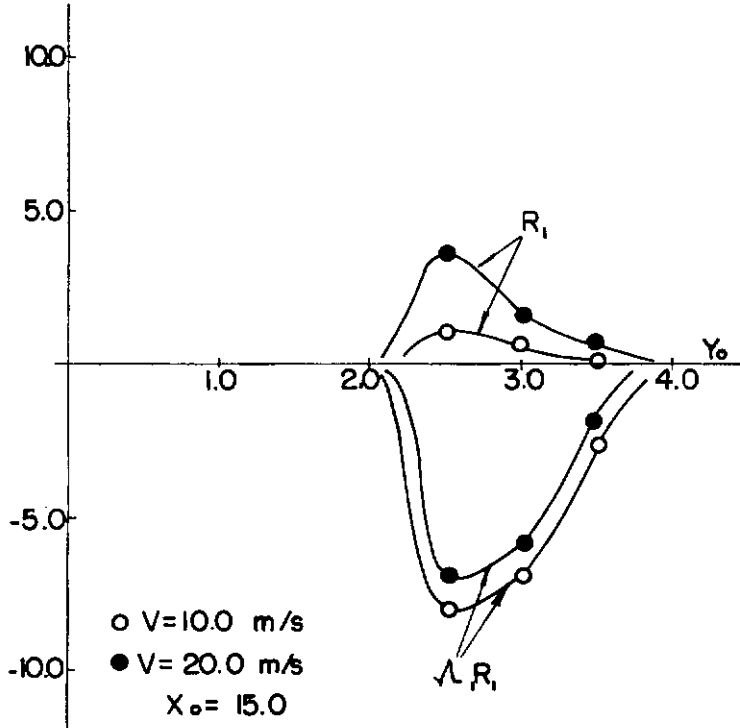
$$\begin{aligned}
 \alpha_o &= \Lambda_2 (2 v_1 - v_2 \Lambda_1) - (v_1 \Lambda_1 + 2 v_2) \\
 \delta_o &= \Lambda_1 (2 v_1 - v_2 \Lambda_2) - (v_1 \Lambda_2 + 2 v_2) \\
 \alpha_1 &= \left(\frac{1}{2} \rho_1 + \frac{1}{4} \Lambda_1 \sigma_1\right) + \Lambda_2 \left(\frac{1}{4} \Lambda_1 \rho_1 - \frac{1}{2} \sigma_1\right) \\
 \alpha_2 &= \left(\rho_2 + \frac{1}{2} \Lambda_1 \sigma_2\right) + \Lambda_2 \left(\frac{1}{2} \Lambda_1 \rho_2 - \sigma_2\right) \\
 \delta_1 &= \left(\rho_1 + \frac{1}{2} \Lambda_2 \sigma_1\right) + \Lambda_1 \left(\frac{1}{2} \Lambda_2 \rho_1 - \sigma_1\right) \\
 \delta_2 &= \left(\frac{1}{2} \rho_2 + \frac{1}{4} \Lambda_2 \sigma_2\right) + \Lambda_1 \left(\frac{1}{4} \Lambda_2 \rho_2 - \frac{1}{2} \sigma_2\right) \\
 \Delta_o &= \alpha_1 \delta_2 - \alpha_2 \delta_1
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Curvas típicas para as amplitudes dos ciclos limite, com diferentes valores para a velocidade do vento, são mostradas nas Figuras 3.1a e 3.1b, atribuindo os seguintes valores para os parâmetros do sistema:

$$\begin{aligned}
 m &= 3 \text{ kg} & \ell &= 1 \text{ m} & d &= 0,04 \text{ m} \\
 \omega_x &= 10 \text{ rd/s} & ; & \omega_y &= 12 \text{ rd/s} & ; \quad \rho = 1,225 \text{ kg/m}^3
 \end{aligned}$$



(a)



(b)

FIGURA 3.1 - AMPLITUDES DOS CICLOS-LIMITE PARA O CONDUTOR MÓVEL

3.4 - ESTABILIDADE DOS CICLOS-LIMITE

Usando (3.15) e os coeficientes definidos em (3.18), as equações (3.17) podem ser escritas na forma:

$$R_1' = A R_1 (\alpha_1 R_1^2 + \alpha_2 R_2^2 - \alpha_0) \quad (3.19)$$

$$R_2' = - A R_2 (\delta_1 R_1^2 + \delta_2 R_2^2 - \delta_0)$$

onde:

$$A = \frac{\mu \gamma_1}{(\Omega_1^2 - \Omega_2^2)}$$

O estudo da estabilidade dos ciclos limite, pode ser feito, através das equações variacionais do sistema, as quais se escrevem a partir de (3.19), como se segue:

$$\begin{Bmatrix} \Delta R_1' \\ \Delta R_2' \end{Bmatrix} = A \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta R_1 \\ \Delta R_2 \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

onde:

$$r_{11} = 3 \alpha_1 R_1^2 + \alpha_2 R_2^2 - \alpha_0$$

$$r_{12} = 2 \alpha_2 R_1 R_2$$

$$r_{21} = - 2 \delta_1 R_1 R_2$$

$$r_{22} = - (\delta_1 R_1^2 + 3 \delta_2 R_2^2 - \delta_0)$$

e os valores de R_1 e R_2 são os mesmos definidos em (3.18).

Para a estabilidade do sistema, é necessário que as raízes do polinômio

$$\lambda^2 - A (r_{11} + r_{22}) \lambda + A^2 (r_{11} r_{22} - r_{12} r_{21}) = 0$$

tenham a parte real negativa.

Contornos típicos são mostrados na Figura 3.2, para o mesmo sistema estudado no item anterior.

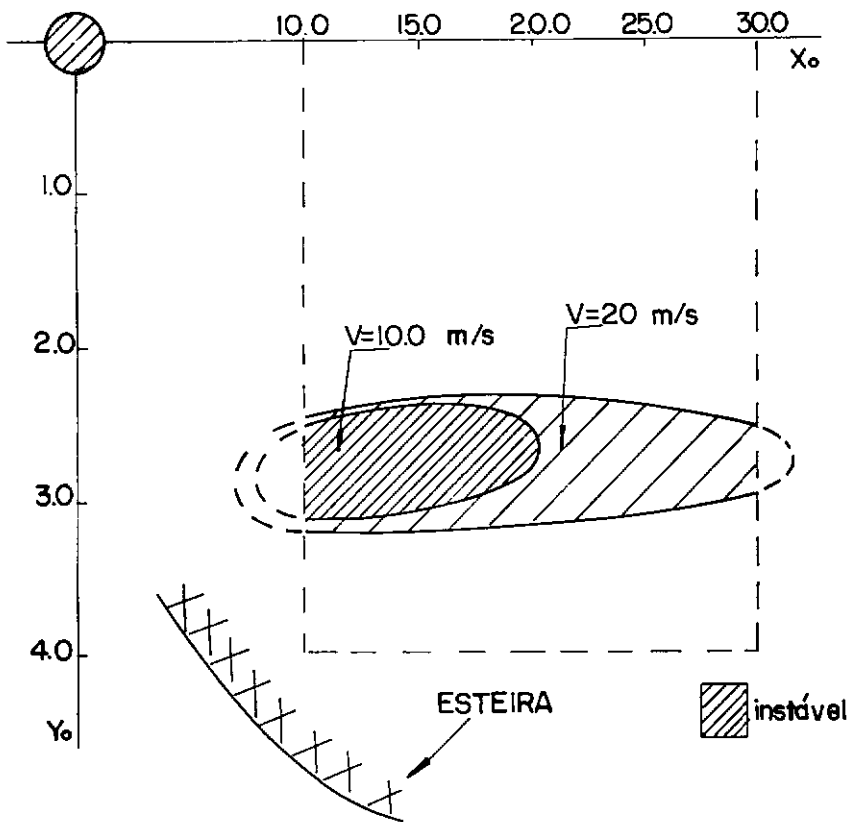


FIGURA 3.2 - CONTORNOS DE ESTABILIDADE PARA OS CICLOS-LIMITE

Para um estudo detalhado do método de Krylov e Bogoliubov, consultar as referências 37, 38, 39 e 40.

3.5 - MÉTODO DO BALANÇO HARMÔNICO

A solução numérica das amplitudes dos ciclos limite, usando o método de Krylov e Bogoliubov, mostrou que alguns pontos dentro da esteira do condutor fixo, apresentavam desvios elevados para um dos harmônicos que compoem a resposta do sistema. Isto faz com que esta componente de valor elevado, tenha que ser abandonada por ser fisicamente irreal, reduzindo a resposta do sistema a uma linha reta com coeficiente angular

$$\Lambda = \frac{\omega_1^2 - \Omega^2}{\gamma_1} = \frac{\gamma_2}{\omega_2^2 - \Omega^2}$$

onde Ω é dado por (2.22).

Na tentativa de encontrar uma solução mais geral para o modelo (3.5) e fazer um estudo comparativo com o método de Krylov e Bogoliubov, foi empregado o método do balanço harmônico.

Adotando para (3.5) uma solução da forma:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \sum_{n=1}^2 (P_n \sin \Omega_n \tau + Q_n \cos \Omega_n \tau) \\ u_2 &= \sum_{n=1}^2 (R_n \sin \Omega_n \tau + S_n \cos \Omega_n \tau) \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

onde:

P_n , Q_n , R_n e S_n são constantes desconhecidas.

Substituindo (3.21) e suas derivadas em (3.5) e igualando os coeficientes dos termos em seno e cosseno em ambos os membros das equações, obtemos o seguinte conjunto de relações não lineares:

$$\begin{bmatrix} t_{1n} & t_{2n} & t_{3n} & t_{4n} \\ \tilde{t}_{2n} & \tilde{t}_{1n} & \tilde{t}_{4n} & \tilde{t}_{3n} \\ v_{1n} & v_{2n} & v_{3n} & v_{4n} \\ \tilde{v}_{2n} & \tilde{v}_{1n} & \tilde{v}_{4n} & \tilde{v}_{3n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_n^2 \\ Q_n^2 \\ R_n^2 \\ S_n^2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{bmatrix} P_n & R_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_n & S_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_n & R_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_n & S_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_{5n} \\ \tilde{t}_{5n} \\ v_{5n} \\ \tilde{v}_{5n} \end{Bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} W_{1n} & W_{2n} & W_{3n} & W_{4n} \\ W_{2n} & -W_{1n} & W_{4n} & -W_{3n} \\ z_{1n} & z_{2n} & z_{3n} & z_{4n} \\ z_{2n} & -z_{1n} & z_{4n} & -z_{3n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_n \\ Q_n \\ R_n \\ S_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
& n = 1, 2 \quad (3.22)
\end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned}
t_{1n} &= 2 b_{31} Q_n - 3 a_{31} S_n \quad ; \quad t_{2n} = 2 b_{31} Q_n - a_{31} S_n \\
t_{3n} &= (a_{22} + 6 b_{13}) Q_n - a_{13} S_n \quad ; \quad t_{4n} = (2b_{13} - a_{22}) Q_n - a_{13} S_n \\
t_{5n} &= 2 a_{31} Q_n - 2 (a_{22} + 2 b_{13}) S_n \quad ; \\
v_{1n} &= 2a_{31} Q_n - (3b_{31} + 2a_{22}) S_n \quad ; \quad v_{2n} = 2a_{31} Q_n + (2a_{22} - b_{31}) S_n
\end{aligned}$$

$$v_{3n} = 6 a_{13} Q_n - b_{13} S_n \quad ; \quad v_{4n} = 2 a_{13} Q_n - b_{13} S_n$$

$$v_{5n} = 2 (b_{31} + 2 a_{22}) Q_n - 4 a_{13} S_n ,$$

$$W_{1n} = 4 (\Omega_n^2 - \omega_1^2)/\mu \Omega_n ; W_{2n} = 8 v_1 ; W_{3n} = 4 \gamma_1/\mu \Omega_n ;$$

$$W_{4n} = - 4 v_2$$

$$z_{1n} = - 4 \gamma_2/\mu \Omega_n ; z_{2n} = 8 v_2 ; z_{3n} = 4 (\omega_2^2 - \Omega_n^2)/\mu \Omega_n ;$$

$$z_{4n} = 4 v_1 \quad (3.23)$$

O til ~ sobre uma determinada variável, significa que seu valor é obtido trocando (Q por P) e (S por R) nas expressões dadas por (3.23). Por exemplo \tilde{t}_{1n} é obtido de t_{1n} da forma seguinte:

$$\tilde{t}_{1n} = 2 b_{31} P_n - 3 a_{31} R_n$$

e

$$\tilde{v}_{4n} = 2 a_{13} P_n - b_{13} R_n , \text{ etc.}$$

As relações (3.22) representam dois conjuntos separados de equações, cada um deles consistindo de quatro relações algébricas não lineares com quatro incógnitas: P_n , Q_n , R_n e S_n . É óbvio que $(P_n = Q_n = R_n = S_n = 0)$ é uma solução que satisfaz (3.22). Esta solução corresponde a posição não perturbada do condutor móvel. Qualquer quádrupla diferente de zero, que satisfaça (3.22) representa um ciclo limite.

3.6 - CICLOS-LIMITE

As relações (3.22) podem ser escritas na forma:

$$\begin{aligned} f_i (P_n, Q_n, R_n, S_n) &= 0 \\ i &= 1, 2, 3, 4 \\ n &= 1, 2 \end{aligned}$$

As amplitudes dos ciclos limite, são as coordenadas dos pontos de mínimo local da superfície dada por:

$$\psi = \sum_{i=1}^4 f_i^2 \quad (3.24)$$

Existe um grande número de programas de computador empregando métodos diferentes, capazes de minimizar a função ψ . A maioria dos que foram utilizados, apresentaram resultados oscilatórios em torno dos pontos de mínimo. Dessa maneira um programa foi desenvolvido especialmente para este caso. O fluxograma mostrando a estratégia usada, encontra-se no Apêndice D.

Em linhas gerais, a estratégia consiste em adotar valores iniciais para a quádrupla de pontos e perturba-la. Para cada nova quádrupla, a função ψ é calculada e comparada com o valor anterior ψ_* . O valor anterior do elemento é substituído pelo valor perturbado, somente se ψ é menor do que ψ_* .

A perturbação é efetuada em ambas as direções (positiva e negativa), usando incrementos Δ_k ($k = 1, 2, 3, 4$). Os valores de Δ escolhidos, eram iguais a 5% do valor absoluto do respectivo elemento.

Um vetor $\{L\}$, 4×1 é zerado no início de cada ciclo da iteração e testado no final de cada ciclo. O valor de

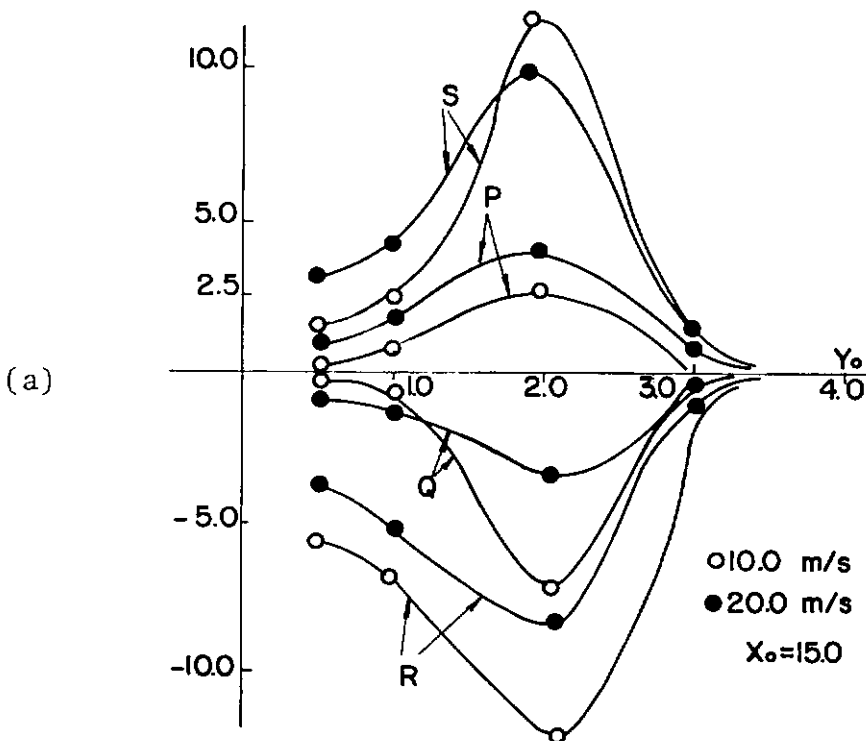
entrada de $\{L\}$ é substituído por 1, se uma minimização é encontrada, ou seja, se $\psi < \psi_*$. A iteração termina se $\{L\} = \{0\}$ no final de qualquer ciclo.

A grande dificuldade deste tipo de estratégia e de outras semelhantes, consiste na escolha adequada para os valores iniciais. Após várias tentativas, os valores:

$$P_n = 0,9 x_0 ; Q_n = -2,0 y_0 ; R_n = -2,0 y_0 ; S_n = 0,9 x_0$$

se mostraram os mais apropriados para a maioria dos casos tentados.

Para testar o método, um caso típico foi analisado, para diferentes valores da velocidade do vento, varrendo uma malha gerada pelo programa, onde um grande número de pontos dentro da esteira do condutor fixo foi considerado. A convergência do método é mais lenta do que a dos métodos habituais mas as oscilações numéricas desaparecem. Resultados típicos são mostrados nas Figuras 3.3(a) e 3.3(b) para o mesmo sistema estudado pelo método de Krylov e Bogoliubov nos itens 3.3 e 3.4.



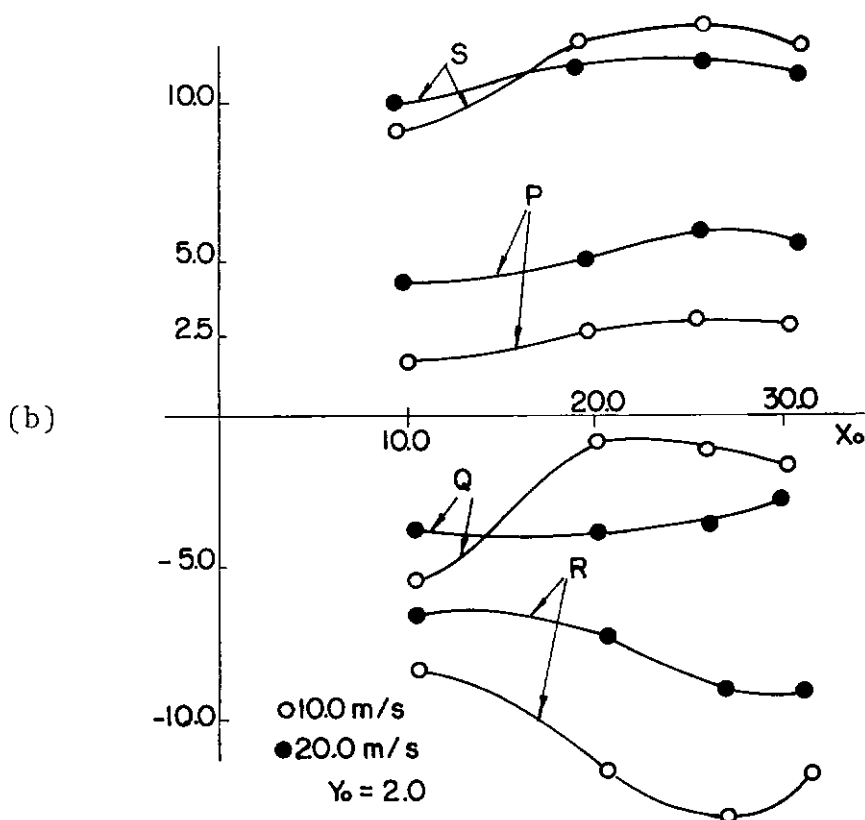


FIGURA 3.3 - AMPLITUDES DOS CICLOS-LIMITE

3.7 - ANÁLISE DA ESTABILIDADE DOS CICLOS-LIMITE

Para estudar a estabilidade dos ciclos limite obtidos pelo método do balanço harmônico, é necessário impor perturbações à solução que satisfaz as equações (3.5).

Chamaremos $(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)$ as perturbações impostas a (P, Q, R, S) respectivamente. Os δ_m ; $m = 1, 2, 3, 4$ são considerados funções de τ . Para simplificar as notações na análise que se segue, substituiremos $(\sin \Omega_n \tau)$ por s e $(\cos \Omega_n \tau)$ por c .

Podemos mostrar que as variáveis (u_1) , (u_2) e suas derivadas, sofrerão os seguintes acréscimos, após aplicar as perturbações:

$$\left. \begin{aligned}
 u_k &\rightarrow u_k + (\delta_{2k-1}) s + (\delta_{2k}) c \\
 u'_k &\rightarrow u'_k + (\delta'_{2k-1} - \delta_{2k} \Omega_n) s + (\delta'_{2k} + \delta_{2k-1} \Omega_n) c \\
 u''_k &\rightarrow u''_k + (\delta''_{2k-1} - 2\delta'_{2k} \Omega_n - \delta_{2k-1} \Omega_n^2) s + \\
 &\quad + (\delta''_{2k} + 2\delta'_{2k-1} \Omega_n - \delta_{2k} \Omega_n^2) c
 \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned}
 k &= 1, 2 \\
 n &= 1, 2
 \end{aligned}$$

Substituindo (3.25) nas equações (3.5), desprezando os termos de ordem superior em δ e igualando os termos em seno e coseno a zero, obtemos as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
 &\left\{ \begin{array}{c} \delta''_1 \\ \delta''_2 \\ \delta''_3 \\ \delta''_4 \end{array} \right\} + \left[\begin{array}{cccc} g_{11} & g_{12} + \Gamma & g_{13} & g_{14} \\ \bar{g}_{12} & \bar{g}_{11} & \bar{g}_{14} & \bar{g}_{13} \\ -2 g_{13} & -2 g_{14} & \frac{1}{2} g_{11} & \frac{1}{2} g_{12} + \Gamma \\ -2 g_{14} & -2 \bar{g}_{13} & \frac{1}{2} g_{12} - \Gamma & \frac{1}{2} \bar{g}_{11} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \delta'_1 \\ \delta'_2 \\ \delta'_3 \\ \delta'_4 \end{array} \right\} \\
 &+ \left[\begin{array}{cccc} h_{11} + \lambda_1 & h_{12} & h_{13} + \lambda_2 & h_{14} \\ -\tilde{h}_{12} & -\tilde{h}_{11} + \lambda_1 & -\tilde{h}_{14} & -\tilde{h}_{13} + \lambda_2 \\ h_{31} + \lambda_3 & h_{32} & h_{33} + \lambda_4 & h_{34} \\ -\tilde{h}_{32} & -\tilde{h}_{31} + \lambda_3 & -\tilde{h}_{34} & -\tilde{h}_{33} + \lambda_4 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{array} \right\} \\
 &= \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad (3.26)
 \end{aligned}$$

onde:

$$g_{11} = (\mu/2) \{3 b_{31} P_n^2 + b_{31} Q_n^2 + 3 b_{13} R_n^2 + b_{13} S_n^2 + 4 v_1\}$$

$$g_{12} = (\mu) \{b_{31} P_n Q_n + b_{13} R_n S_n\}$$

$$g_{13} = (-\mu/4) \{3 a_{31} P_n^2 + a_{31} Q_n^2 + 3 a_{13} R_n^2 + a_{13} S_n^2 + \\ + 3 a_{22} P_n R_n + a_{22} Q_n S_n + 4 v_2\}$$

$$g_{14} = (-\mu/4) \{2 a_{31} P_n Q_n + a_{22} Q_n R_n + 2 a_{13} R_n S_n + a_{22} S_n P_n\}$$

$$h_{11} = (\mu \Omega_n/2) \{-2 b_{31} P_n Q_n - a_{31} Q_n R_n + (2 b_{13} + a_{22}) R_n S_n \\ + 3 a_{31} S_n P_n\}$$

$$h_{12} = (\mu \Omega_n/4) \{-2 b_{31} P_n^2 - 6 b_{31} Q_n^2 - (6 b_{13} + a_{22}) R_n^2 \\ - (2 b_{13} - a_{22}) S_n^2 - 2 a_{31} (P_n R_n - Q_n S_n) - 8 v_1\}$$

$$h_{13} = (\mu \Omega_n/2) \{-a_{31} P_n Q_n - (6 b_{13} + a_{22}) Q_n R_n + a_{13} R_n S_n \\ + (2 b_{13} + a_{22}) S_n P_n\}$$

$$h_{14} = (\mu \Omega_n/4) \{3 a_{31} P_n^2 + a_{31} Q_n^2 + a_{13} R_n^2 + 3 a_{13} S_n^2 \\ + 2 (2 b_{13} + a_{22}) P_n R_n - 2 (2 b_{13} - a_{22}) Q_n S_n + 4 v_2\}$$

$$h_{31} = (\mu \Omega_n/2) \{-2 a_{31} P_n Q_n + (b_{31} - 2 a_{22}) Q_n R_n + 2 a_{13} R_n S_n \\ + (2 a_{22} - 3 b_{31}) S_n P_n\}$$

$$h_{32} = (\mu \Omega_n/2) \{-a_{31} P_n^2 - 3 a_{31} Q_n^2 - 3 a_{13} R_n^2 - a_{13} S_n^2 \\ + (b_{31} - 2 a_{22}) P_n R_n - (b_{31} + 2 a_{22}) Q_n S_n - 4 v_2\}$$

$$h_{33} = (\mu \Omega_n/2) \{(b_{31} - 2 a_{22}) P_n Q_n - 6 a_{13} Q_n R_n - b_{13} R_n S_n \\ + 2 a_{13} S_n P_n\}$$

$$h_{34} = (\mu \Omega_n/4) \{(3 b_{31} - 2 a_{22}) P_n^2 - (b_{31} + 2 a_{22}) Q_n^2 - b_{13} R_n^2 \\ - 3 b_{13} S_n^2 + 4 a_{13} P_n R_n - 4 a_{13} Q_n S_n - 4 v_1\}$$

$$\Gamma = -2 \Omega_n ; \lambda_1 = \omega_1^2 - \Omega_n^2 ; \lambda_2 = -\gamma_1 ; \lambda_3 = -\gamma_2 ; \lambda_4 = \omega_2^2 - \Omega_n^2$$

$$n = 1, 2 \quad (3.27)$$

O til ~ acima de uma dada quantidade indica que ela pode ser obtida a partir da expressão original dada por (3.27), fazendo uma troca das variáveis da seguinte forma:

$$(P_n \leftrightarrow Q_n) \quad \text{e} \quad (R_n \leftrightarrow S_n)$$

Para um ciclo limite estável, o sistema de equações lineares dado por (3.26), deve ser estável. A equação característica pode ser obtida e as raízes examinadas, inclusive pelo critério de Routh-Hurwitz.

3.8 - COMENTÁRIOS

Do estudo conduzido no presente capítulo, podemos fazer as seguintes observações:

- a) Os coeficientes C_L e C_D foram expandidos em série de Taylor até os termos de segunda ordem (quadráticos), introduzidos no modelo matemático, resultando em um novo modelo não linear simplificado, agora com não linearidade cúbica. Para esta aproximação, é possível prever as amplitudes dos ciclos limite para o caso geral (o caso não ressonante).
- b) O novo modelo simplificado, foi inicialmente resolvido pelo método de Krylov e Bogoliulov, fornecendo expressões fechadas para as amplitudes dos ciclos limite. Embora este método seja inteiramente geral para a solução do problema das oscilações de sub-vão e o estudo da estabilidade dos ciclos limite seja bastante simples, ele apresentou alguns desvios numéricos para as amplitudes.
- c) Na tentativa de contornar os problemas causados pelos desvios numéricos apresentados pelo método de Krylov e Bogoliubov, um segundo método foi tentado. O modelo foi novamente resolvido através de um balanço do primeiro harmônico. Como resultado, as amplitudes dos ciclos limite devem satisfazer a um sistema de equações algébricas não lineares

$$(f_i(X_1, X_2, X_3, X_4) = 0 ; i = 1, 2, 3, 4)$$

As amplitudes dos ciclos limite, são as coordenadas dos pontos de mínimo local da função

$$\psi = \sum_{i=1}^4 f_i^2$$

Para minimizar a função ψ , foi desenvolvido um programa de computador, cuja estratégia, está descrita no item 3.6. A superfície representada por ψ , apresenta em alto grau de complexidade e sugere a possibilidade da existência simultânea de um certo número de ciclos limite. Evidentemente, nem todos serão estáveis ou mesmo fisicamente possíveis.

- d) A solução do modelo, usando os dois métodos anteriormente re-

feridos, mostrou que as amplitudes dos ciclos limite não existem em toda região estudada ($10 < x_0 < 30$; $y_0 < 4$) . Numa faixa próxima ao eixo dos x_0 (eixo que coincide com a direção do vetor velocidade de vento \underline{V}) e em uma outra próxima a extremidade da esteira, o método de Krylov e Bogoliubov não apresenta solução e o balanço harmônico fornece somente solução trivial.

- e) Os resultados numéricos para as amplitudes dos ciclos limite, obtidos por ambos os métodos, mostraram uma boa concordância qualitativa e quantitativa entre si (excetuando-se os casos em que haja desvio) e com resultados experimentais de Cooper²⁶ . No entanto, o método de Krylov e Bogoliubov evidenciou uma tendência em deslocar o mapa das amplitudes para mais próximo da extremidade da esteira. Obviamente, esta tendência só pode ser tomada em sentido relativo, ou seja, em confronto com o método do balanço harmônico.

IV - SIMULAÇÃO ANALÓGICA E DIGITAL

4.1 - SIMULAÇÃO ANALÓGICA

A simulação analógica de sistemas não lineares, apresenta muitas vantagens em relação a outros métodos de solução, principalmente pela versatilidade dos estudos paramétricos e pela rapidez na obtenção dos resultados.

Para esta simulação, optou-se pelo modelo com não linearidade cúbica ao invés do modelo completo, não só pela maior facilidade na programação, mas também porque a partir deste modelo simplificado, é possível determinar as amplitudes dos ciclos limite.

Para evitar o problema de sobrecarga no computador, quando as amplitudes assumem valores elevados, é necessário fazer a seguinte mudança de escala nas variáveis do modelo (3.3):

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= 0,1 x \\ \tilde{y} &= 0,1 y\end{aligned}\tag{4.1}$$

onde \tilde{x} e \tilde{y} representam as coordenadas lidas no computador.

Substituindo (4.1) em (3.3), obtemos:

$$\begin{aligned}\tilde{x}'' + \tilde{x} &= 10\mu \{ \tilde{C}_L \tilde{y}' + \tilde{C}_D \left(\frac{\alpha}{100} - 2 \tilde{x}' \right) \} \\ \tilde{y}'' + k^2 \tilde{y} &= 10\mu \{ \tilde{C}_L \left(\frac{\alpha}{100} - 2 \tilde{x}' \right) - \tilde{C}_D \tilde{y}' \}\end{aligned}\tag{4.2}$$

onde:

μ α são os mesmos definidos em (2.7)

$$\tilde{C}_L = \frac{a_{11}}{10} + a_{21} \tilde{x} + a_{12} \tilde{y} + 10 a_{31} \tilde{x}^2 + 10 a_{22} \tilde{x}\tilde{y} + 10 a_{13} \tilde{y}^2$$

$$\tilde{C}_D = \frac{b_{11}}{10} + b_{21} \tilde{x} + b_{12} \tilde{y} + 10 b_{31} \tilde{x}^2 + 10 b_{22} \tilde{x}\tilde{y} + 10 b_{13} \tilde{y}^2$$

e os a_{ij} , b_{ij} são dados por (3.1).

Os valores de entrada para a simulação do modelo (4.2), foram obtidos através de uma programação digital que calcula para cada (x_0, y_0, V) , o valor correspondente de todos os parâmetros do sistema.

A Figura 4.1, mostra a programação do modelo, com os seguintes valores nos potenciômetros:

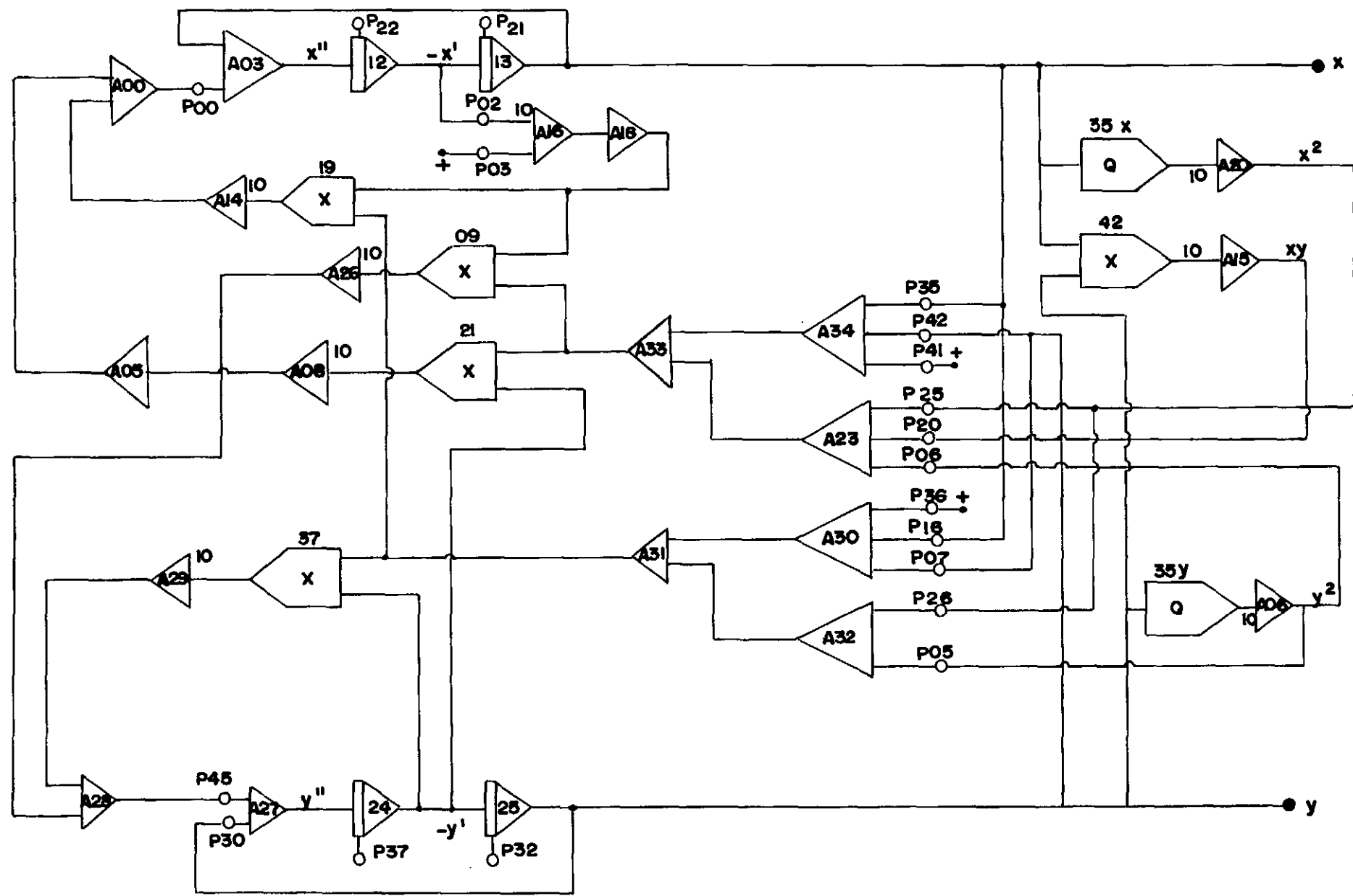
P00	-	10μ	P06	-	$10 a_{13}$
P45			P36	-	$\frac{b_{11}}{10}$
P30	-	k^2	P16	-	b_{21}
P02	-	0,2	P07	-	b_{12}
P03	-	$\frac{\alpha}{100}$	P26	-	$10 b_{31}$
P41	-	$\frac{a_{11}}{10}$	P05	-	$10 b_{13}$
P35	-	a_{21}	P21	-	condição inicial em \tilde{x}
P42	-	a_{12}	P22	-	condição inicial em \tilde{x}'
P25	-	$10 a_{31}$	P32	-	condição inicial em \tilde{y}
P20	-	$10 a_{22}$	P37	-	condição inicial em \tilde{y}'

O sistema foi simulado com os seguintes dados:

$$\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3 ; \ell = 1 \text{ m} ; m = 3 \text{ kg} ; d = 0,04 \text{ m} ; \omega_x = 10 \text{ rd/s}$$

$$k = 1,1$$

FIGURA 4.1



a) 1ª Simulação

Para a primeira simulação, foi escolhido o ponto $x_0 = 10$; $y_0 = 3$, dentro da esteira do condutor fixo e estudada a resposta do sistema com três valores diferentes da velocidade do vento. As seguintes condições iniciais foram impostas ao sistema:

$$\begin{aligned} \Delta x_0 &= 1 & ; & & \Delta x'_0 &= 1 \\ \Delta y_0 &= -5 & ; & & \Delta y'_0 &= 5 \end{aligned}$$

A Figura 4.2, mostra as trajetórias do condutor móvel, nos ciclos iniciais do movimento.

As Figuras 4.3 e 4.4, mostram as trajetórias nos planos $x - x'$ e $y - y'$ para $V = 6$ m/s . Para este valor da velocidade do vento, o sistema tende para a posição não perturbada.

Com o aumento da velocidade do vento para 12 m/s, o sistema tem um comportamento semelhante ao anterior mas já é possível perceber um decréscimo do amortecimento em x . É o que mostram as Figuras 4.5 e 4.6.

Continuando a aumentar a velocidade do vento o sistema atinge um regime estacionário para $V = 21$ m/s. As Figuras 4.7 e 4.8, mostram os resultados obtidos. Na Figura 4.9 vemos as trajetórias do condutor móvel, alguns ciclos antes de entrar no regime estacionário, onde a contínua inclinação das órbitas, ainda se faz presente.

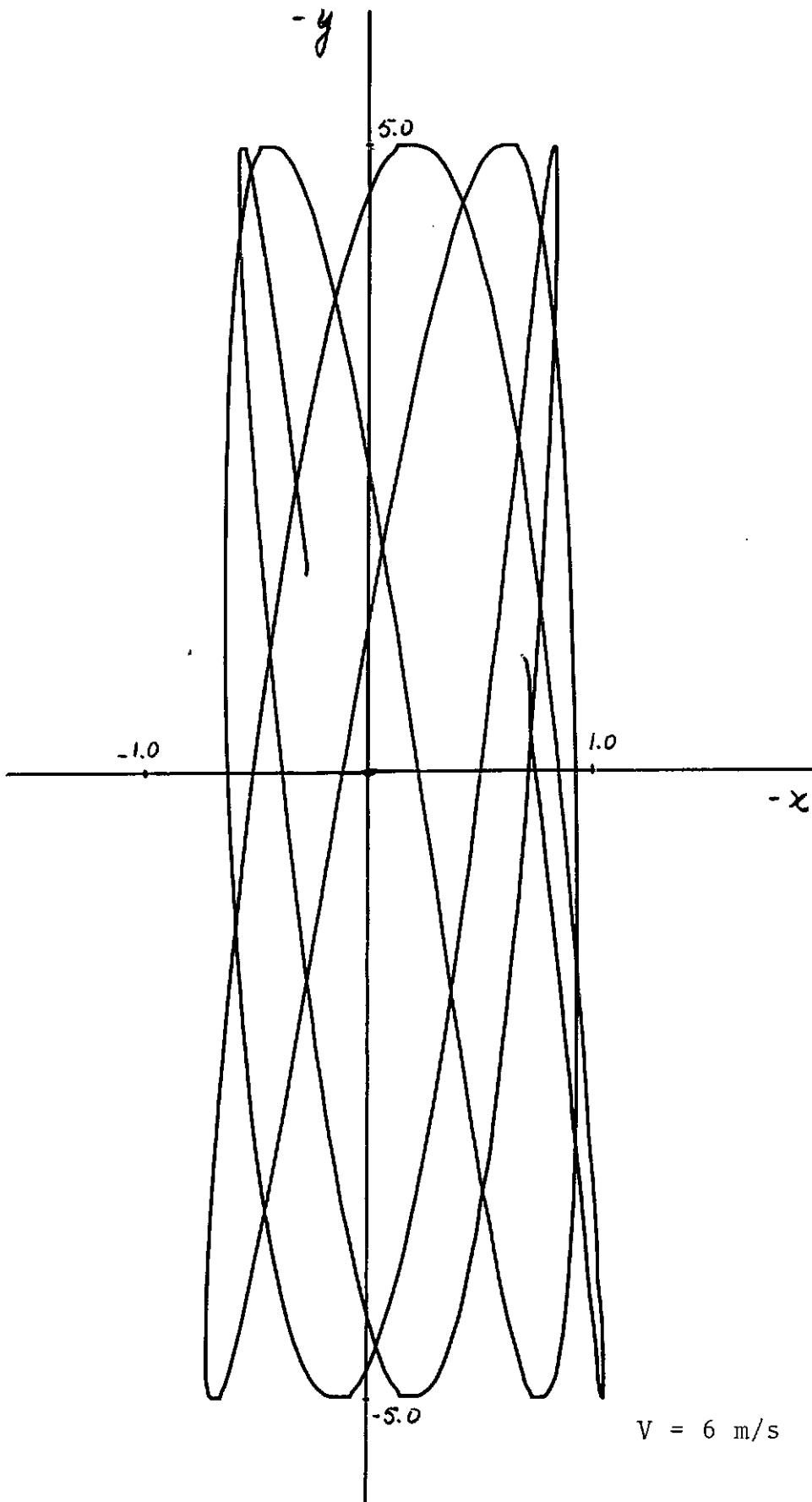
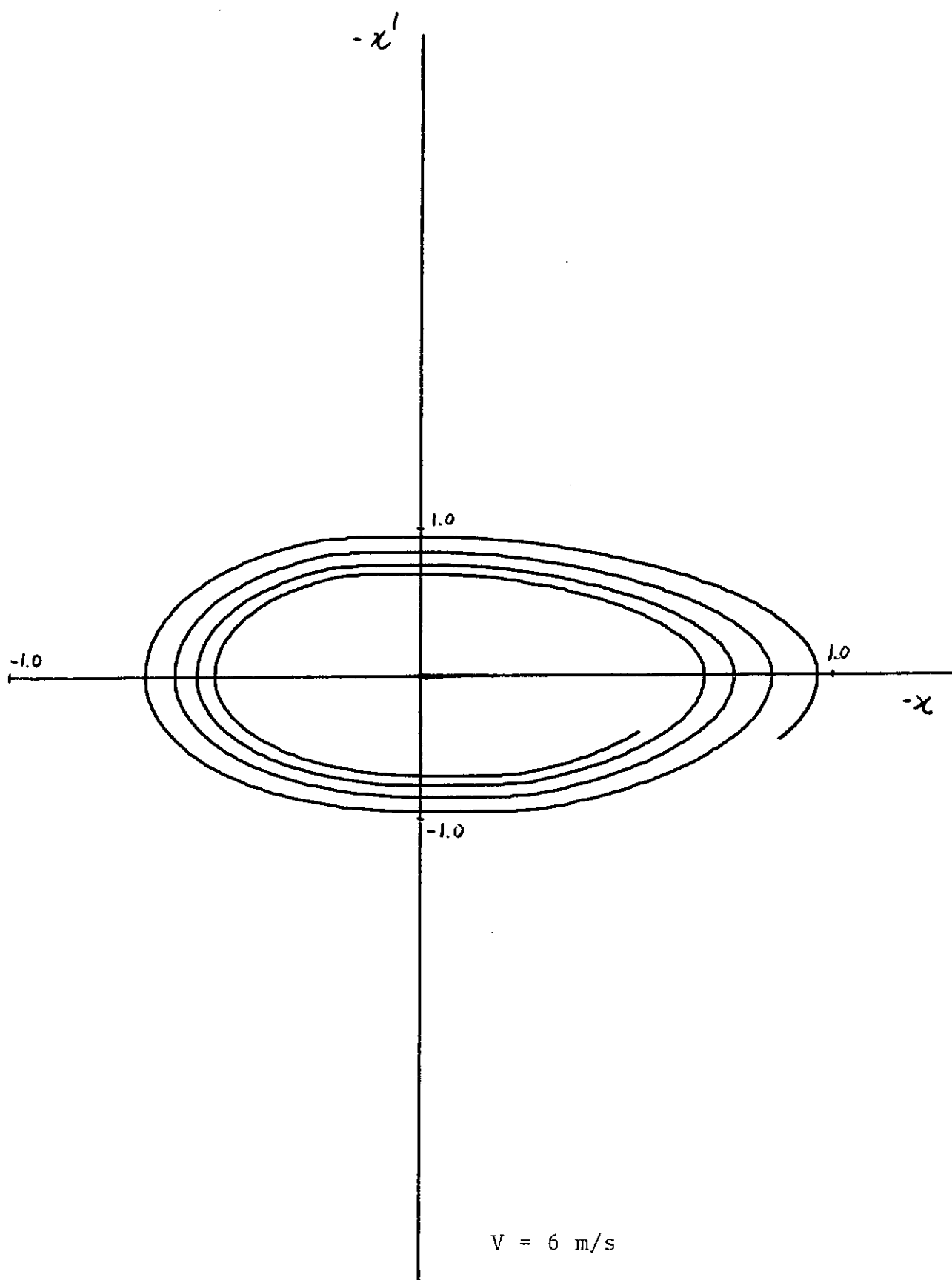
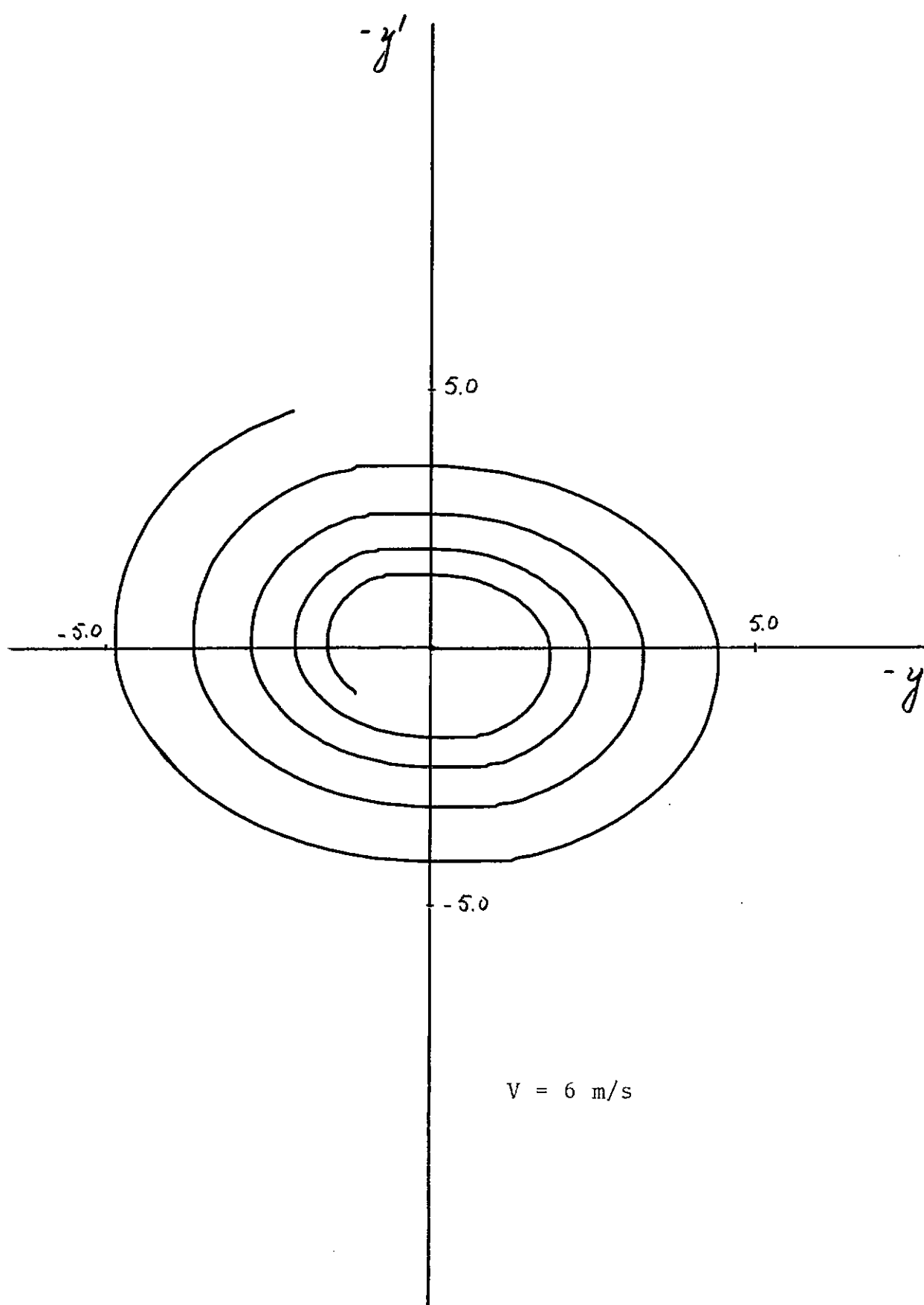
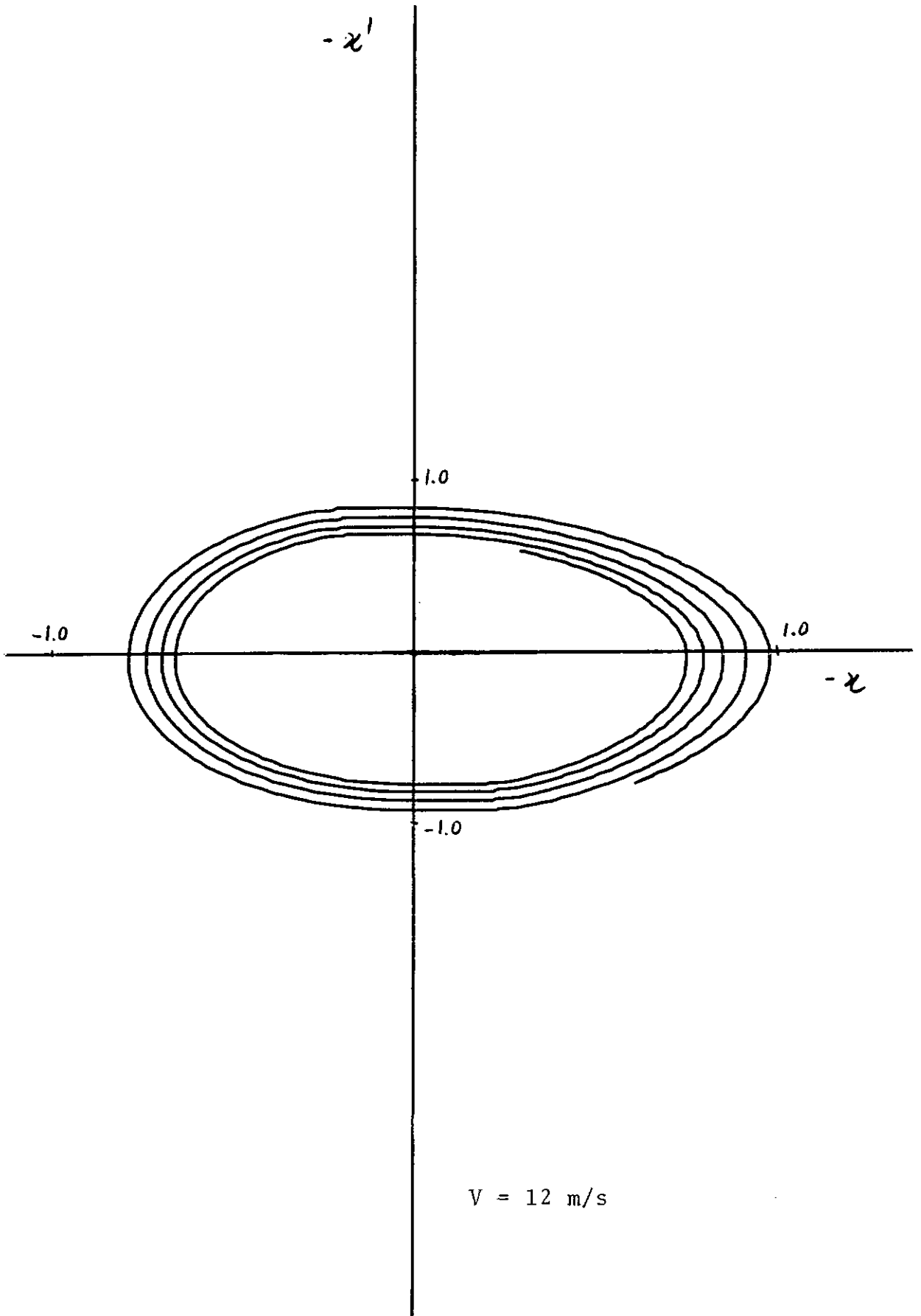
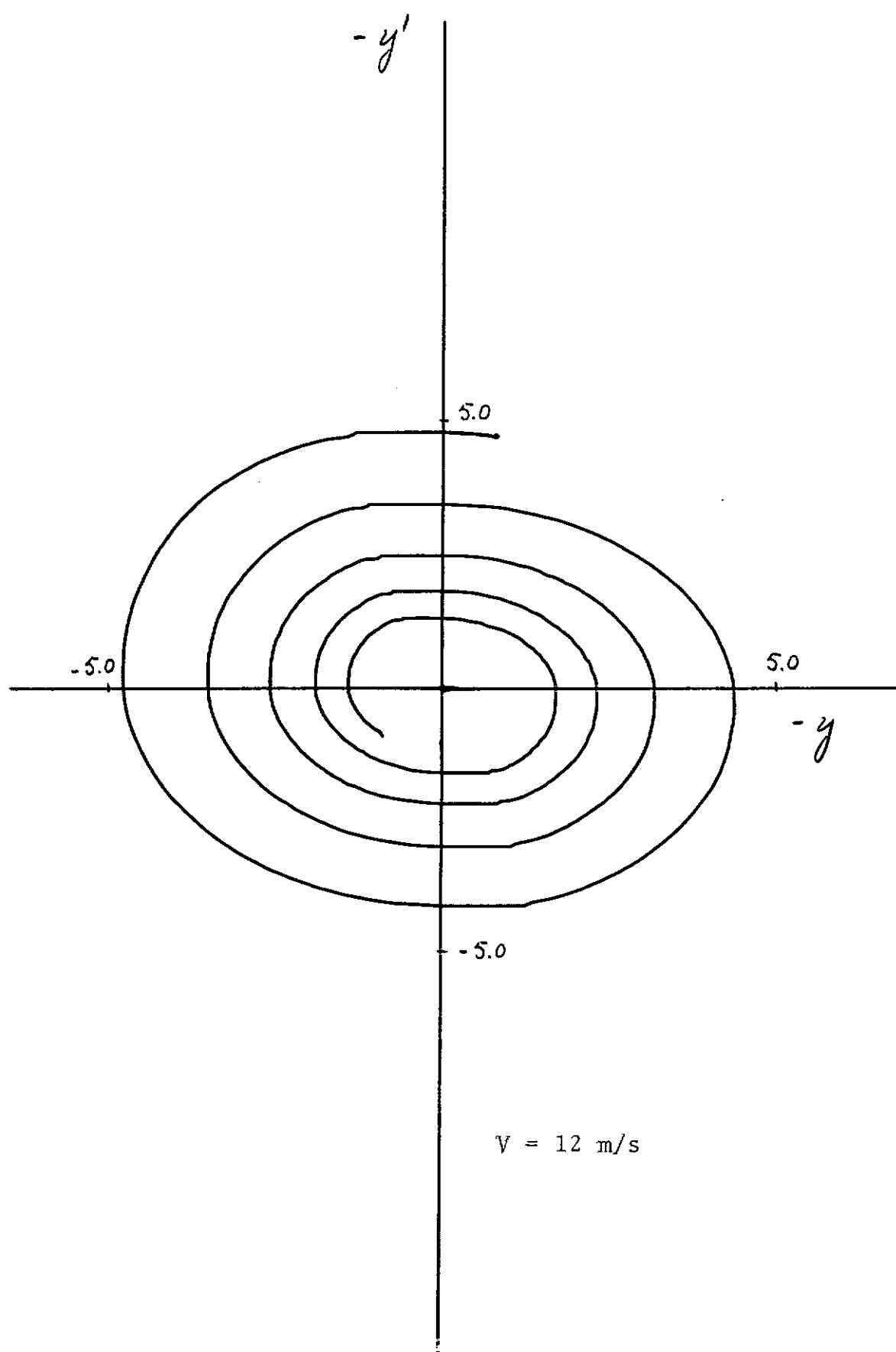


FIGURA 4.2 - TRAJETÓRIAS DO CONDUTOR MÓVEL NOS PRIMEIROS CICLOS DO MOVIMENTO

FIGURA 4.3 - TRAJETÓRIAS NO PLANO $x - x'$

FIGURA 4.4 - TRAJETÓRIAS NO PLANO $y - y'$

FIGURA 4.5 - TRAJETÓRIAS NO PLANO $x - x'$

FIGURA 4.6 - TRAJETÓRIAS NO PLANO $y - y'$

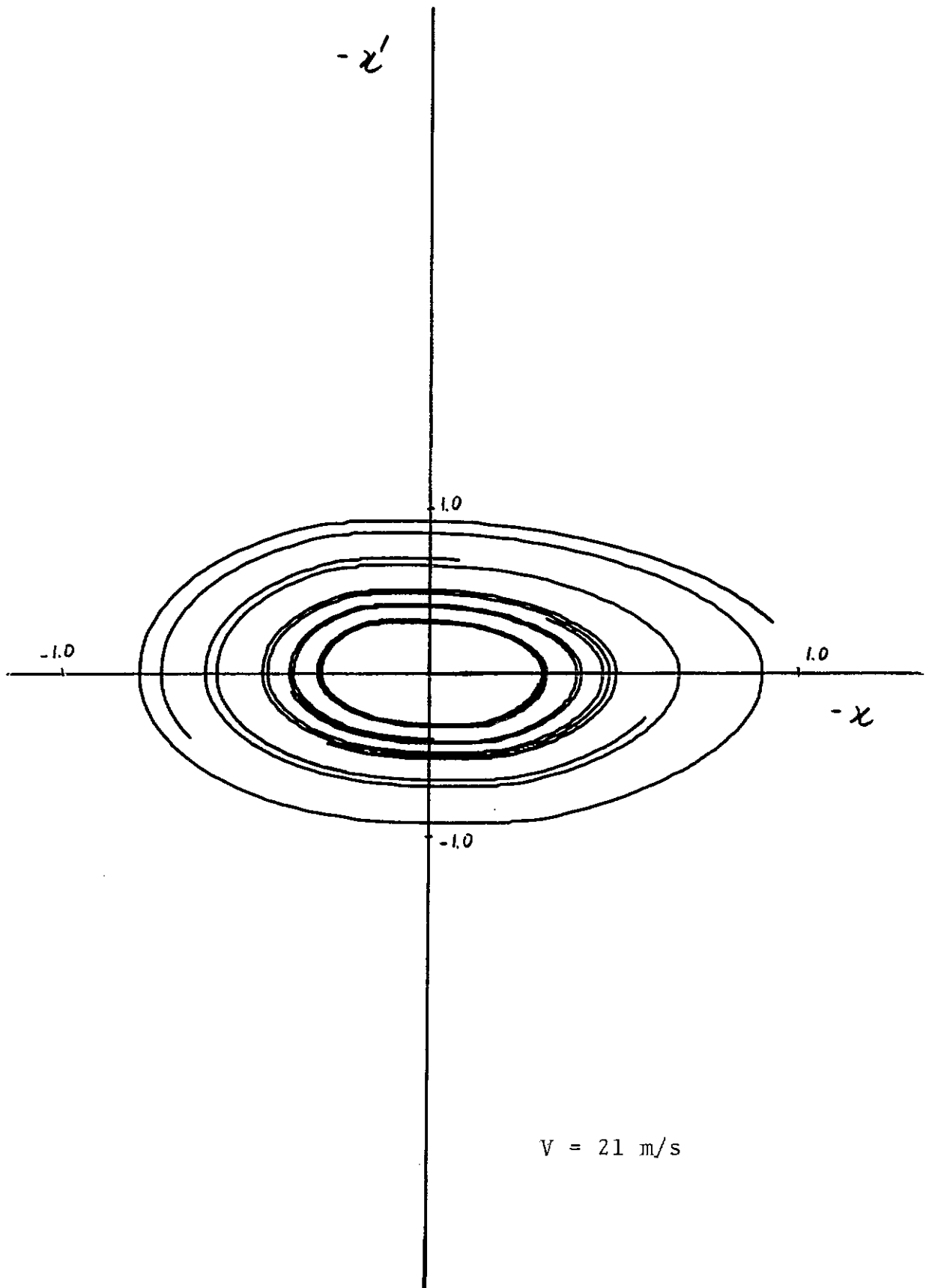


FIGURA 4.7 - CICLO-LIMITE

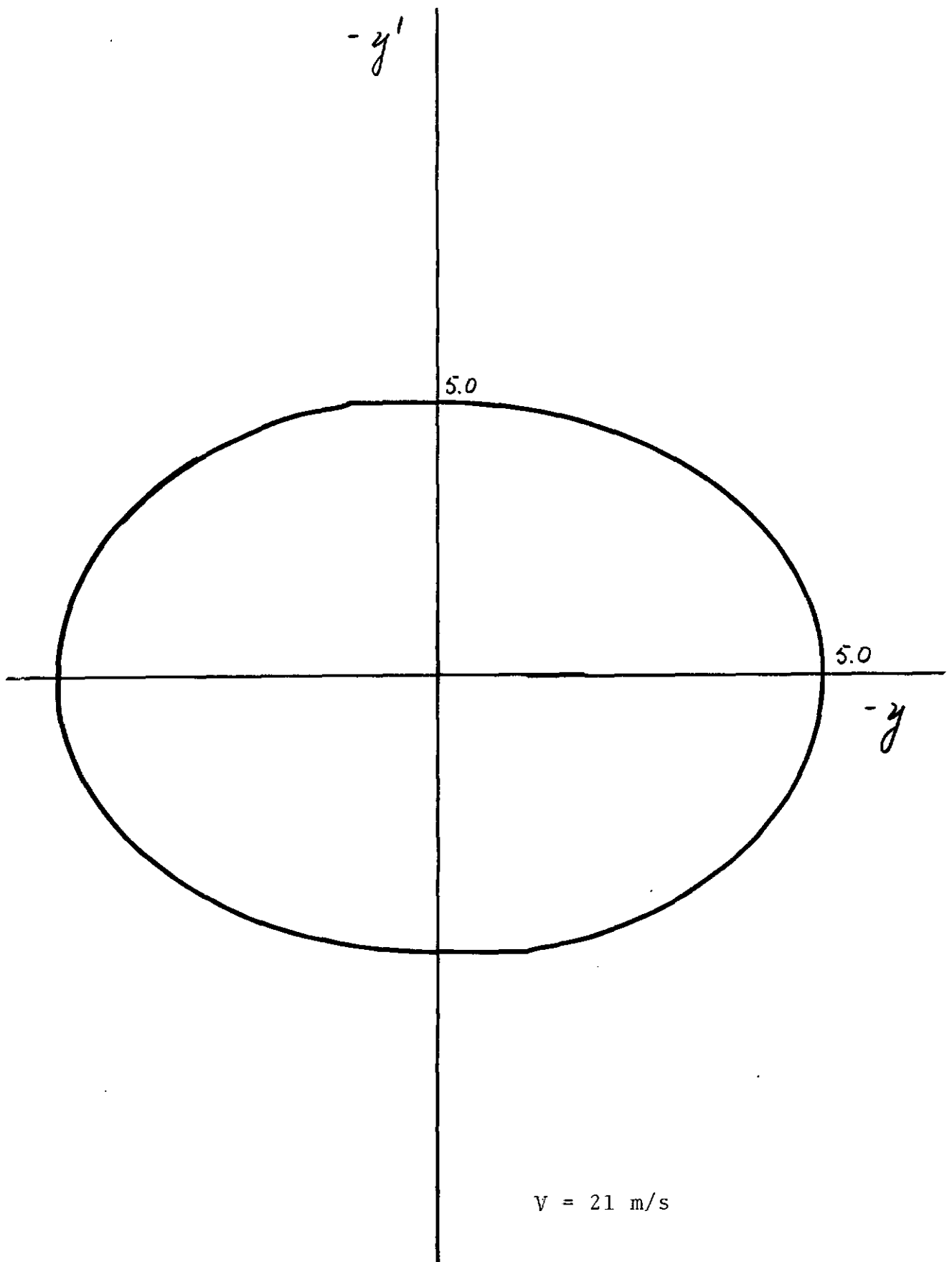


FIGURA 4.8 - CICLO-LIMITE

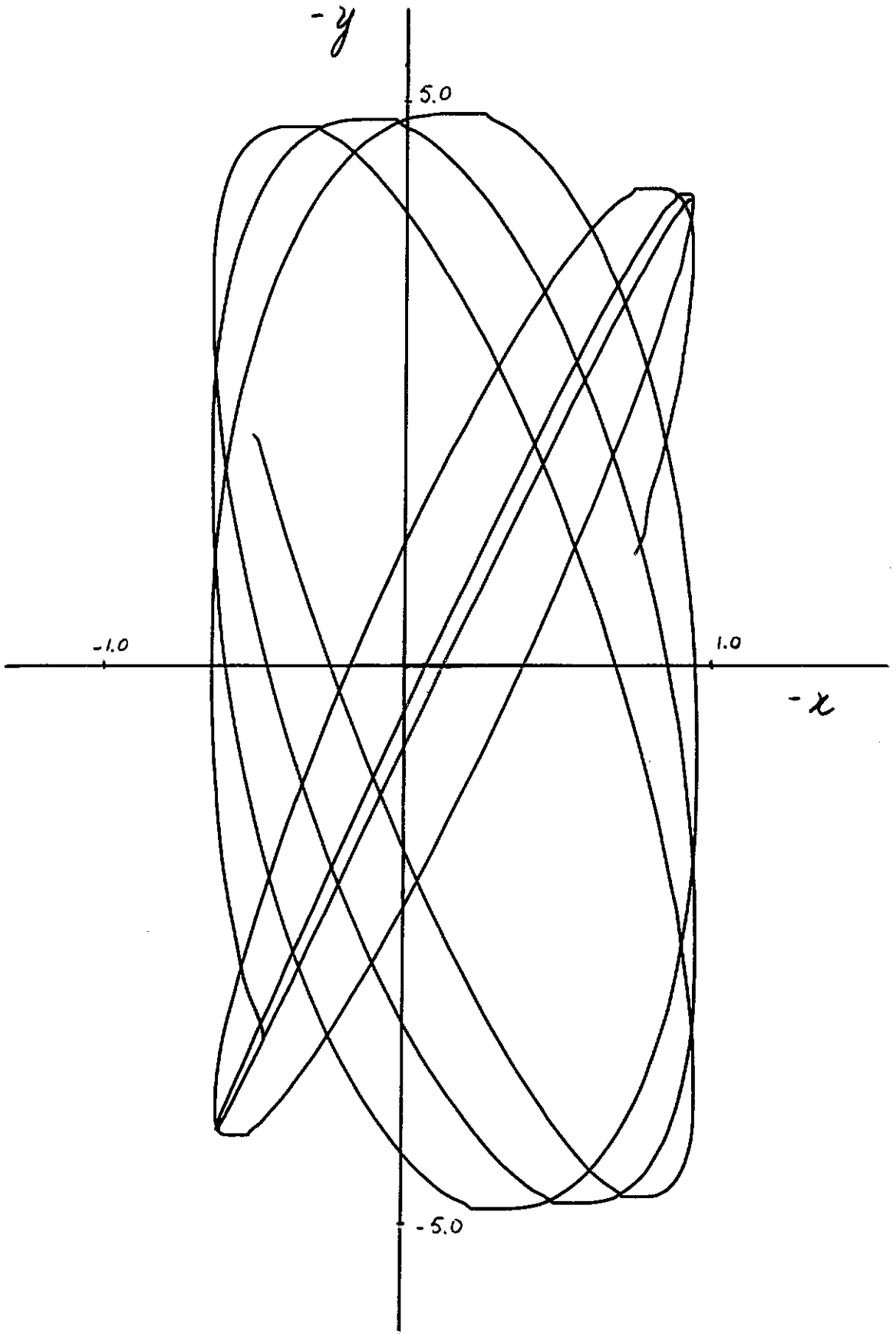


FIGURA 4.9 - TRAJETÓRIAS DO CONDUTOR MÓVEL PRÓXIMO DE UM CICLO LIMITE

b) 2ª Simulação

Na segunda simulação, o ponto escolhido tem coordenadas $x_0 = 30$; $y_0 = 3$, com as seguintes condições iniciais:

$$\Delta x_0 = 1,5 \quad : \quad \Delta x'_0 = 1,5$$

$$\Delta y_0 = 2,0 \quad ; \quad \Delta y'_0 = 2,0$$

Para uma velocidade do vento de 6 m/s, o sistema atinge rapidamente um ciclo limite, conforme pode ser visto nas Figuras 4.10 e 4.11.

A Figura 4.12, mostra as trajetórias típicas do condutor móvel no regime estacionário. A contínua inclinação nas órbitas ainda persiste, mas o movimento fica restrito a um retângulo cujos lados são as amplitudes em x e y .

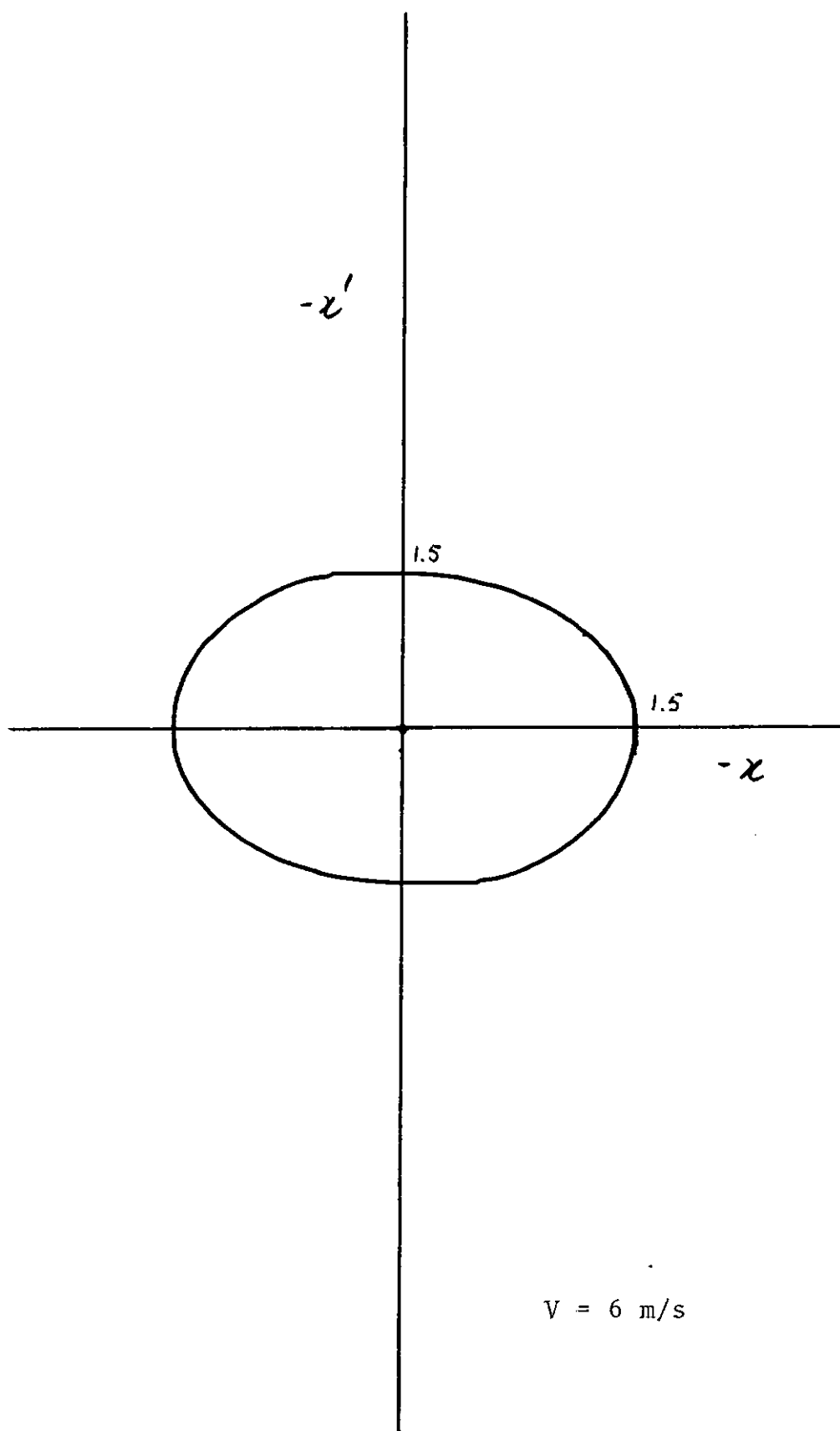


FIGURA 4.10 - CICLO-LIMITE

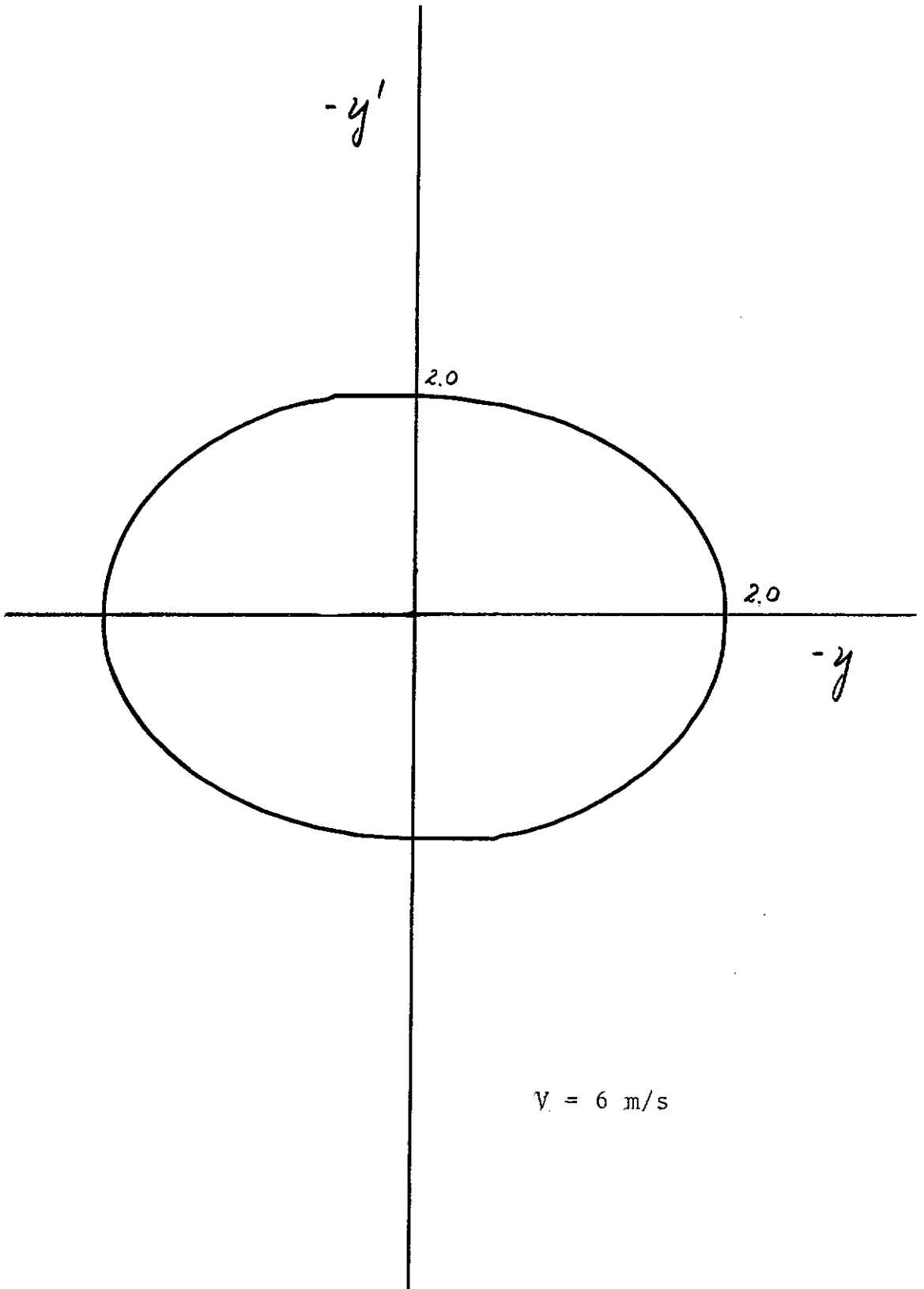


FIGURA 4.11 - CICLO LIMITE

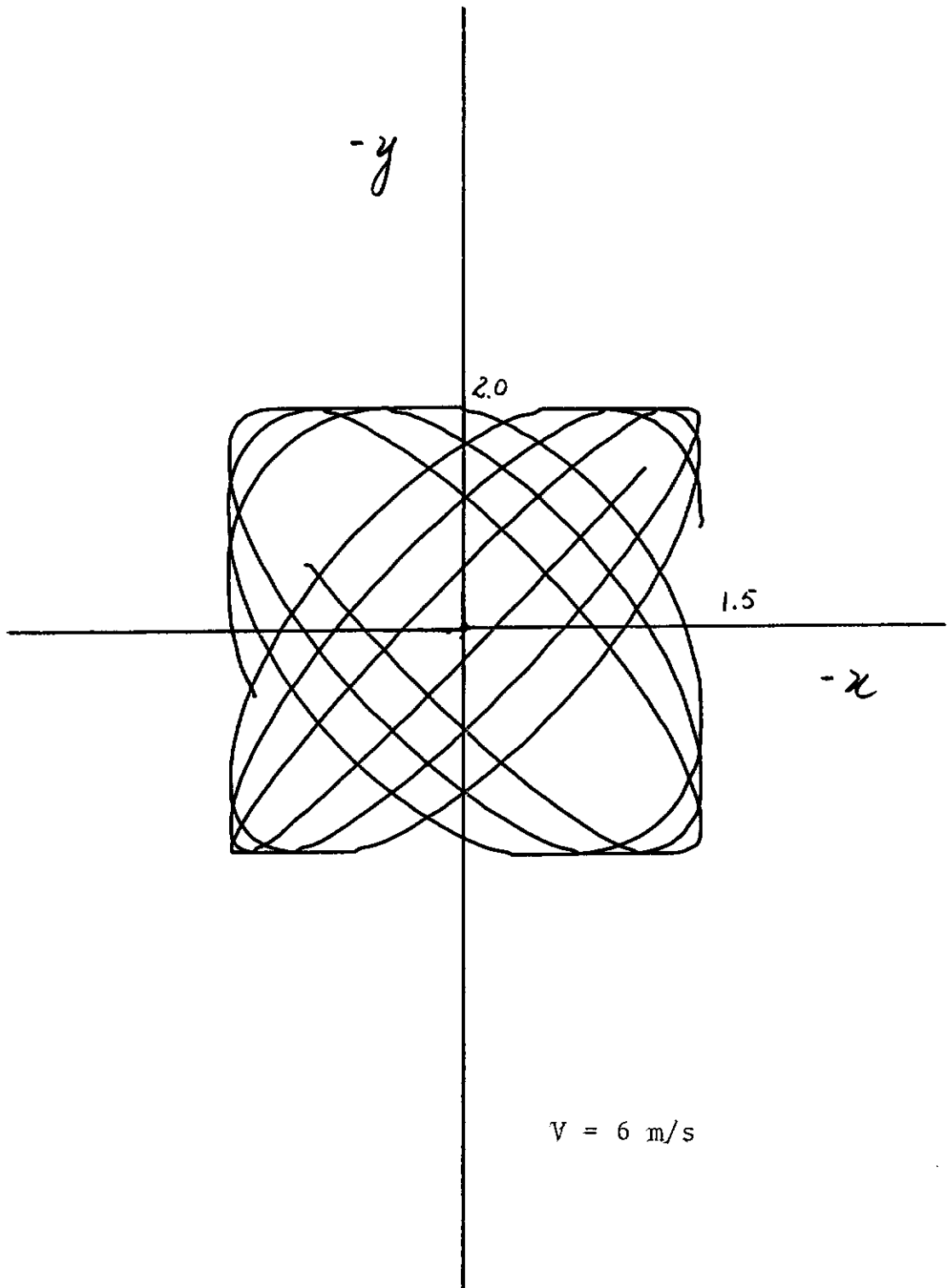


FIGURA 4.12 - TRAJETÓRIAS DO CONDUTOR MÓVEL NO CICLO LIMITE

4.2 - CICLOS-LIMITE POR INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

O estudo dos ciclos limite através da integração numérica do modelo, apresenta uma série de obstáculos, devido ao demorado processo de tentativas associado a pouca versatilidade dos estudos paramétricos. Essas dificuldades são maiores, no caso específico das oscilações de sub-vão, pois as frequências são relativamente baixas, tornando o processo ainda mais lento. Com o apoio de algum estudo analítico ou experimental, é possível superar parcialmente algumas dessas dificuldades, persistindo aquelas que são inerentes ao próprio computador.

Para o estudo que se segue, foram utilizados os valores previstos pelo método de Krylov e Bogoliubov, como condição inicial para a integração numérica do modelo completo (2.8). A integração foi feita, usando o algoritmo de Runge-Kutta. Apesar de não ter sido feito um estudo extensivo com o modelo, os valores das amplitudes dos ciclos limite obtidos por integração numérica, são bem próximos daqueles que são previstos pelo método de Krylov e Bogoliubov^{41, 42, 43}.

O sistema foi integrado usando-se os seguintes dados:

$$\begin{aligned} \rho &= 1,225 \text{ kg/m}^3 ; \ell = 0,91 \text{ m} ; m = 3,13 \text{ kg} \\ d &= 0,04 \text{ m} ; \omega_x = 6,91 \text{ rd/s} ; \omega_y = 7,23 \text{ rd/s} \end{aligned}$$

As Figuras 4.13 e 4.14, mostram um ciclo limite típico, para o ponto $x_0 = 30$; $y_0 = 3,16$ e $V = 3 \text{ m/s}$. As condições iniciais impostas ao sistema foram:

$$\begin{aligned}\Delta x_0 &= 8,6 & ; & \quad \Delta x'_0 = 0,2 \\ \Delta y_0 &= -5 & ; & \quad \Delta y'_0 = 0,04\end{aligned}$$

Nas Figuras 4.15 e 4.16, vemos um ciclo limite para o ponto $x_0 = 10$; $y_0 = 3,3$ e $V = 3$ m/s, com as condições iniciais:

$$\begin{aligned}\Delta x_0 &= 10 & ; & \quad \Delta x'_0 = 10 \\ \Delta y_0 &= -6 & ; & \quad \Delta y'_0 = 6\end{aligned}$$

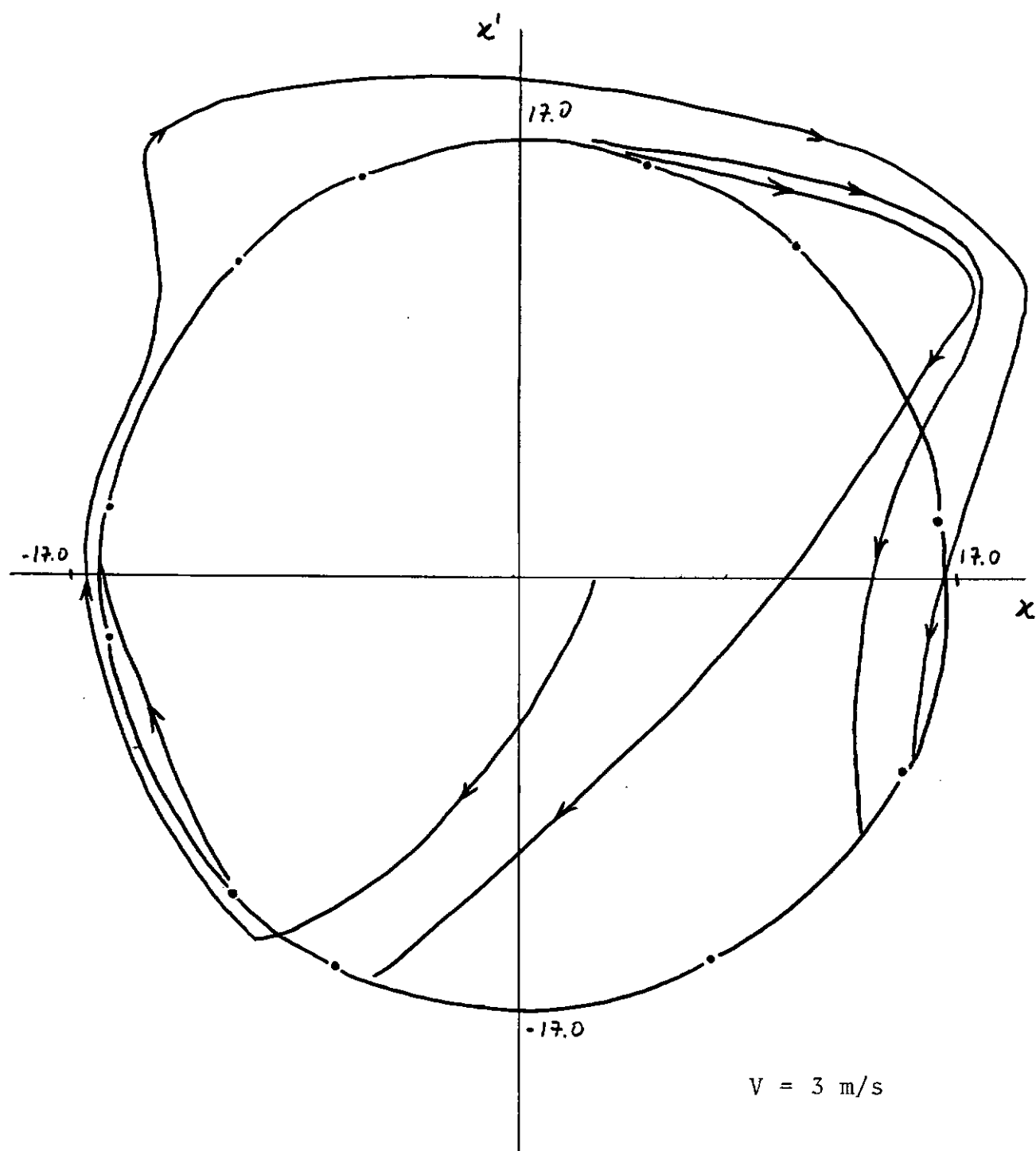


FIGURA 4.13 - CICLO-LIMITE

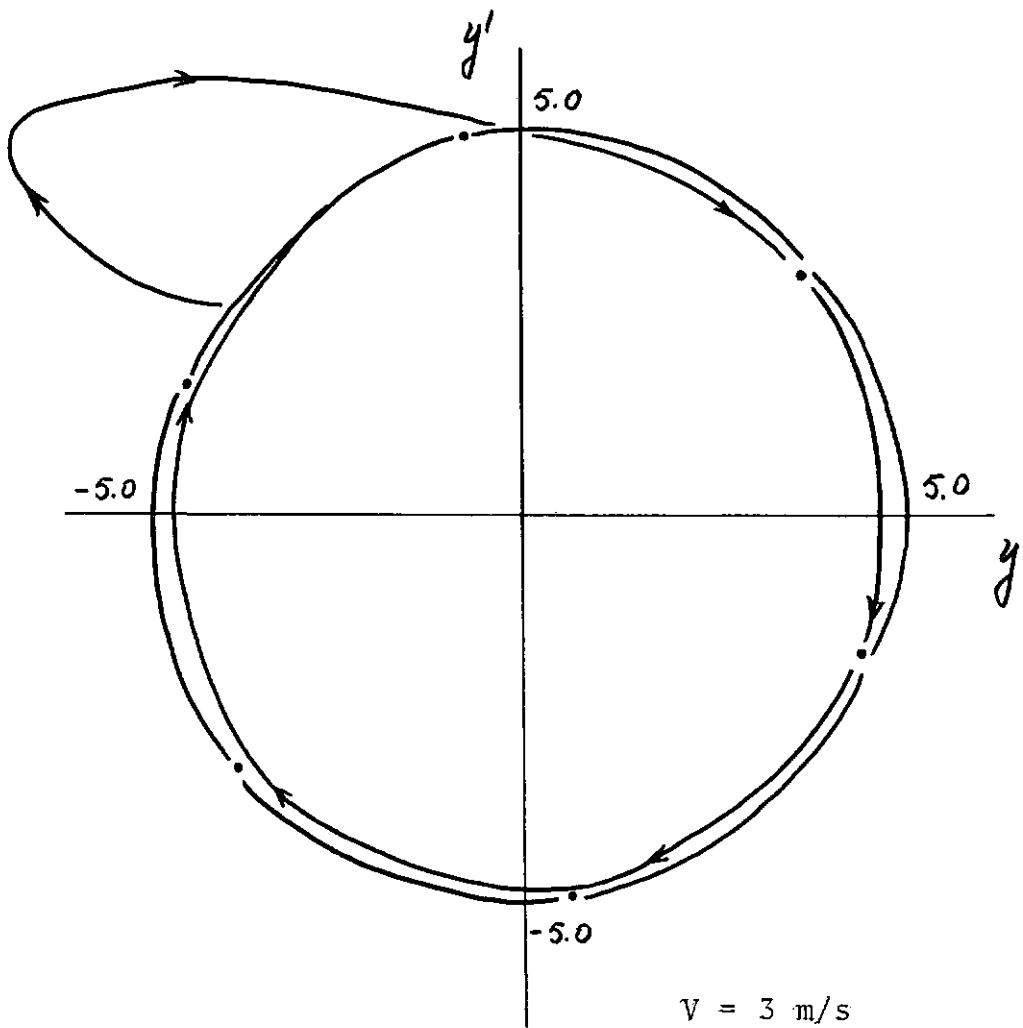


FIGURA 4.14 - CICLO-LIMITE

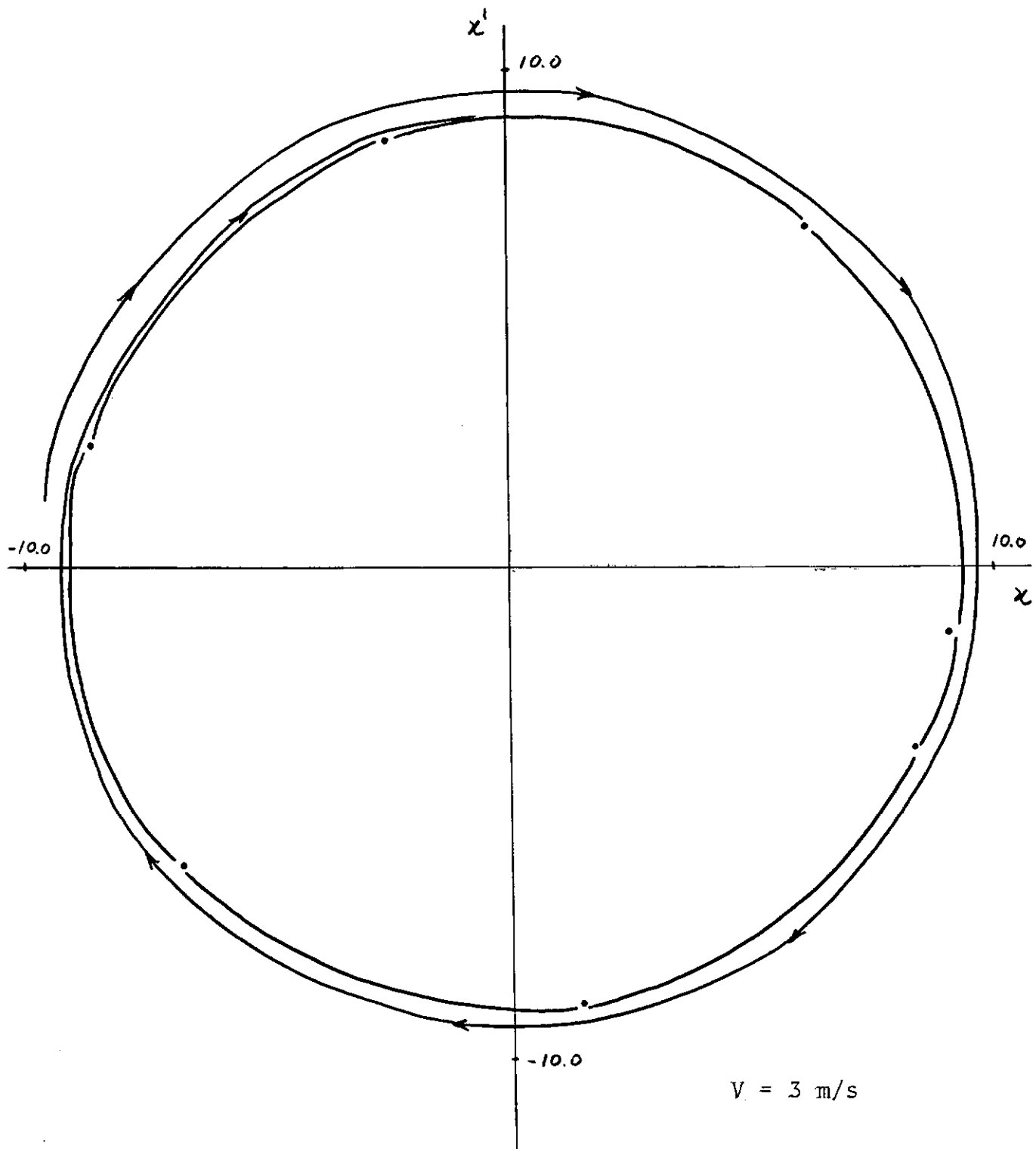


FIGURA 4.15 - CICLO-LIMITE

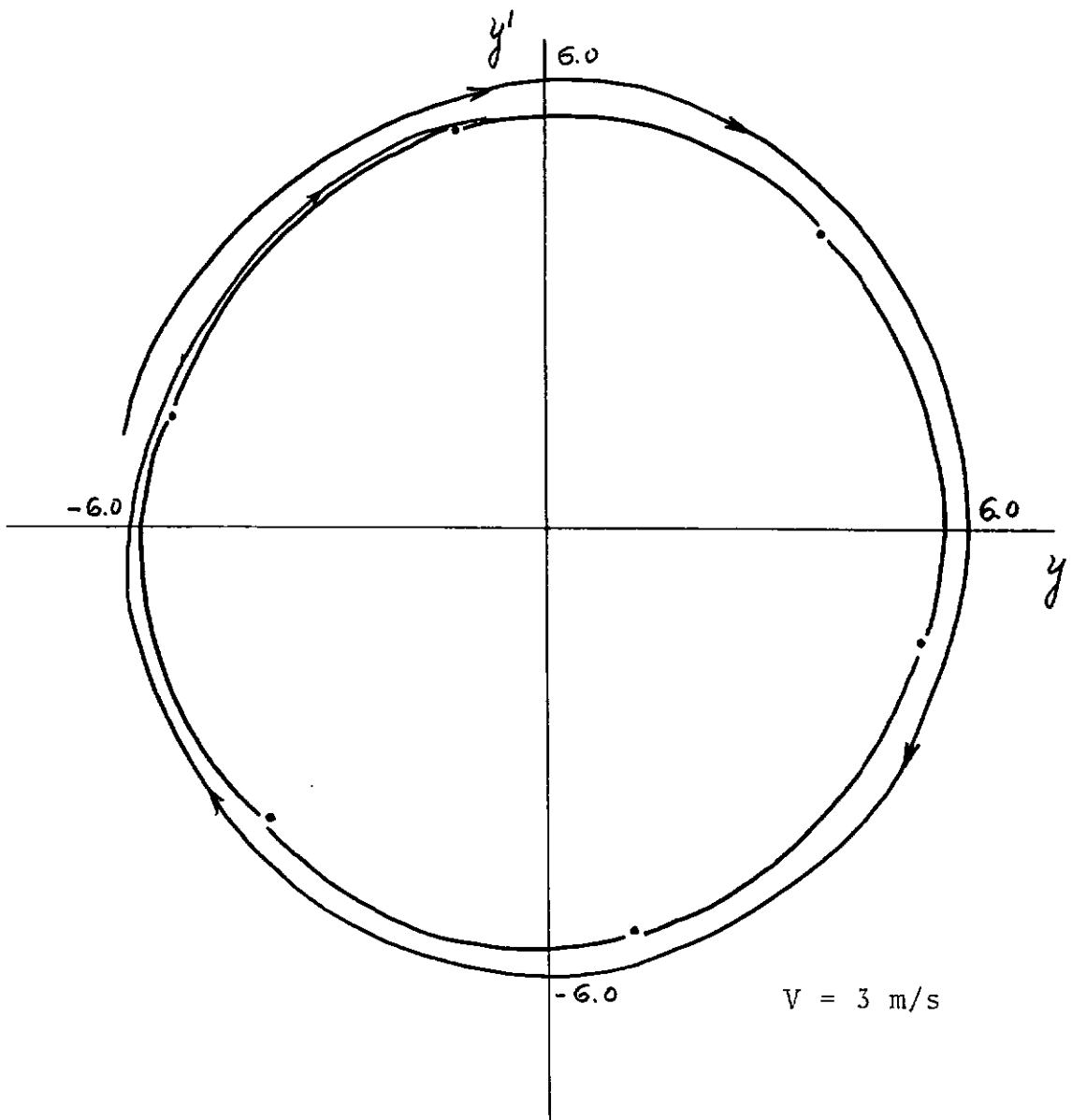


FIGURA 4.16 - CICLO-LIMITE

4.3 - COMENTÁRIOS

Para as simulações com o modelo, temos os seguintes comentários a fazer:

- a) Para complementar os estudos analíticos conduzidos nos Capítulos II e III, foram feitas algumas simulações com o modelo matemático, usando-se os computadores analógico e digital.
- b) Dentre os dois tipos de simulação, a analógica é a que maior facilidade apresenta no estudo dos ciclos limite e a única que conduz a uma visão global do comportamento do sistema, apesar das imprecisões numéricas.
- c) Um estudo extensivo dos ciclos limite através da integração numérica do modelo, é impraticável pelo enorme dispêndio de tempo de computação. No entanto, é possível calcular as amplitudes dos ciclos limite em alguns pontos de interesse, principalmente se existe um conhecimento prévio da ordem de grandeza das amplitudes, na região estudada.
- d) A simulação analógica, comprovou alguns aspectos básicos do fenômeno, já revelados pelos estudos analíticos, entre os quais destacamos:
 - i) Para um determinado ponto (x_0, y_0) da região estudada, existe uma velocidade crítica do vento, a partir da qual o sistema possui oscilações auto-sustentáveis.
 - ii) As amplitudes dos ciclos limite, diminuem a medida que o condutor móvel se aproxima das extremidades da esteira.
 - iii) Para pontos mais afastados lateral e longitudinalmente do condutor fixo, as amplitudes dos ciclos limite surgem para pequenos valores da velocidade do vento.

V - CONCLUSÕES

5.1 - CONSIDERAÇÕES SOBRE O MODELO MATEMÁTICO

O modelo matemático estudado, tenta representar de forma simplificada a dinâmica de um feixe de dois condutores e é perfeitamente adequado a comparações com os resultados experimentais obtidos através de ensaios dinâmicos com modelos reduzidos. As comparações com o sistema real (linha de transmissão), podem ser feitas, mas certas discrepâncias devem ser esperadas, pois algumas das hipóteses admitidas nos modelos (físico e matemático) têm validade restrita para o sistema real. O caráter bidimensional do escoamento, o efeito das paredes do túnel de vento e o processo de realimentação entre os condutores, são algumas das diferenças entre os modelos e o feixe de condutores. Apesar dessas simplificações tanto os modelos matemáticos como os modelos reduzidos, constituem formas alternativas para o estudo do comportamento dinâmico das linhas de transmissão, quando é impossível estudar o próprio sistema.

A modelação matemática, somente levou em conta o amortecimento aerodinâmico do sistema. O amortecimento estrutural, que tem como principais fontes de dissipação de energia, o atrito interno nos condutores, o atrito nas junções dos condutores com os elementos de suspensão e com os espaçadores, foi intencionalmente ignorado por duas razões básicas:

- 1^a) As frequências das oscilações são relativamente baixas.
- 2^a) Existe um grande interesse em conhecer o efeito isolado do amortecimento aerodinâmico sobre a estabilidade do sistema e de que maneira ele está relacionado com as amplitudes dos ciclos limite.

Outra simplificação no modelo, consistiu na restrição do movimento do condutor a pequenos deslocamentos em torno da posição não perturbada. Vale ressaltar, que pequenos deslocamentos, neste caso, significam amplitudes de movimento da ordem do próprio diâmetro do condutor que normalmente se situa na faixa de 3 a 5 cm, aproximadamente. Esta hipótese, elimina o acoplamento cruzado $(x - y)$ entre as forças nos elementos de suspensão do condutor móvel, resultando na simetria das regiões de instabilidade em relação ao eixo dos x_0 . Este fato, concorda com os resultados teóricos e experimentais obtidos por Tsui¹².

5.2 - LIMITAÇÕES DO MODELO NÃO LINEAR SIMPLIFICADO

O modelo matemático, pode ser resolvido com vários graus de aproximação, dependendo da ordem dos termos das expansões em série de Taylor para (C_L) e (C_D) . Assim, inúmeros modelos simplificados podem ser obtidos, desde o modelo linearizado, até os não lineares de alta ordem. No entanto, a solução analítica do modelo com não linearidade cúbica, mostrou que os modelos de ordem superior a terceira, apresentam enormes dificuldades algébricas.

O modelo não linear mais simples, que corresponde a tomar somente a parte linear das expansões em série para (C_L) e (C_D) , apresenta como limitação fundamental, o fato de não prever as amplitudes dos ciclos limite para o caso geral (o não ressonante). Apesar disso, é possível extrair deste modelo, muitas informações sobre o caráter não linear do sistema, entre as quais destacamos:

- a) Para um determinado ponto (x_0, y_0) , dentro da esteira do condutor fixo, existe uma velocidade crítica do vento, acima

da qual o sistema possui oscilações auto-sustentáveis.

- b) As oscilações auto-sustentáveis, podem ocorrer em ambas as regiões, acima e abaixo do eixo dos x_0 , porque o acoplamento cruzado foi desprezado.
- c) As regiões de instabilidade, tendem a aparecer próximo das extremidades da esteira e aumentam um pouco de tamanho e área com o aumento da velocidade do vento.
- d) Fora das regiões de instabilidade, o amortecimento aerodinâmico é bastante forte a ponto de garantir a estabilidade das oscilações.
- e) É possível encontrar expressões fechadas para as velocidades críticas, para qualquer ponto (x_0, y_0) dentro da esteira do condutor fixo.
- f) As curvas para uma mesma velocidade crítica, estão limitadas por uma assíntota dada pela equação (2.36). Todas essas curvas, tendem a se mover em direção a assíntota, quando a velocidade do vento decresce.
- g) Somente em casos especiais (o ressonante), é possível prever as amplitudes dos ciclos limite.

5.3 - AS AMPLITUDES DOS CICLOS-LIMITE

As oscilações de sub-vão, se caracterizam por baixas frequências (0,15 a 5 cps) e amplitudes máximas que podem atingir até 20 diâmetro do condutor. O exato conhecimento dessas amplitudes, pelas implicações que apresentam no projeto das linhas de transmissão, constituiu um dos objetivos principais deste trabalho.

Os estudos conduzidos no Capítulo III, mostraram que é possível preve-las para o caso geral (não ressonante), des

de que o modelo com não linearidade cúbica, seja analisado. As principais conclusões, sobre o comportamento das amplitudes dos ciclos limite, podem ser resumidas como se segue:

- a) Os ciclos limite não existem sobre toda a região estudada dentro da esteira do condutor fixo. Próximo das extremidades da esteira, para $y_0 > 3,5$ aproximadamente, eles desaparecem. Este fato, foi comprovado por ambos os métodos de solução. Isto também concorda com os resultados experimentais de Cooper²⁶.
- b) A reta $y_0 = 3,5$ coincide com o valor da assíntota envolvendo as curvas para uma mesma velocidade crítica.
- c) As amplitudes dos ciclos limite, apresentam uma variação mais acentuada com y_0 , isto é, quando o condutor móvel se desloca em direção a extremidade da esteira do que com a variações no sentido longitudinal x_0 .
- d) A velocidade do vento, afeta o valor das amplitudes, para um mesmo ponto (x_0, y_0) , conforme mostram as curvas 3.1 e 3.3.
- e) Os ciclos limite estáveis, estão localizados aproximadamente sobre a região de instabilidade encontrada pelo modelo simplificado.
- f) Na região de existência dos ciclos limite, é possível determinar os contornos separando os ciclos limite estáveis dos instáveis. Os estudos de estabilidade mostraram que alguns deles podem se tornar instáveis, se a velocidade do vento aumenta.
- g) O estudo da estabilidade dos ciclos limite, mostrou que os valores elevados para as amplitudes, em alguns pontos dentro da esteira, correspondem a ciclos limite instáveis, dentro da região de estabilidade fornecida pelo modelo simplificado.
- h) O método de Krylov e Bogoliubov, mostrou que o amortecimento aerodinâmico é um fator decisivo nas amplitudes dos ciclos li-

mite. Caso ele seja ignorado, as amplitudes são suprimidas.

5.4 - OS MÉTODOS ANALÍTICOS EMPREGADOS

Os métodos utilizados na solução dos modelos simplificados, são todos, métodos convencionais para o estudo dos sistemas fracamente não lineares. Embora eles conduzam a um mesmo resultado, existem algumas particularidades em cada método, que merecem destaque, especificamente no caso do estudo dos ciclos limite.

O estudo das amplitudes dos ciclos limite, usando o método de Krylov e Bogoliubov e através de um balanço harmônico, revelou aspectos complementares entre os métodos, compondo uma visão mais realista do fenômeno daquela que pode ser inferida a partir de um único método. A aproximação assintótica de Krylov e Bogoliubov, fornece expressões fechadas para as amplitudes R_1 e R_2 dos harmônicos de frequência Ω_1 e Ω_2 , que compõem a resposta dinâmica do sistema, além da solução trivial que corresponde a posição não perturbada do condutor móvel. Como este método é aplicado a um determinado modelo simplificado, ele somente é capaz de prever as amplitudes dos ciclos limite que o modelo pode reter.

A solução pelo método do balanço harmônico, com a desvantagem de depender das condições iniciais e conseqüentemente de um estudo preliminar para escolha das condições iniciais mais favoráveis, mostrou que na realidade, podem existir inúmeros ciclos limite para uma dada tríade (x_0, y_0, V) . Evidentemente, nem todos eles podem vir a ser uma solução, por serem fisicamente impossíveis. Além disso, é necessário separar aqueles que são estáveis dos instáveis, o que pode ser feito pela aná

lise da estabilidade, contida no Capítulo III. Neste aspecto importante do problema, os dois métodos são complementares.

Finalmente, as múltiplas soluções encontradas pelo método do balanço harmônico podem ser o ponto de partida para explicar o forte caráter de auto-excitação das oscilações, fazendo com que o condutor móvel, mude constantemente a inclinação das órbitas.

5.5 - MÉTODOS ALTERNATIVOS DE SOLUÇÃO

Além do estudo analítico com modelos simplificados, o modelo completo pode ser integrado, numericamente ou simulado em um computador analógico. Algumas dificuldades, são inerentes a ambos os processos.

A integração numérica, usando qualquer algoritmo conhecido, apresenta grande facilidade computacional mas baixíssima produtividade na busca dos ciclos limite, a menos que exista algum conhecimento prévio, obtido analítica ou experimentalmente, da ordem de grandeza das amplitudes. Se este conhecimento inexistente, o método é muito pouco prático, embora os resultados, quando obtidos, sejam bastante precisos.

A simulação analógica, pela facilidade apresentada nos estudos paramétricos, demonstrou ser uma ferramenta extremamente útil, no sentido de se ter uma visão global do fenômeno, com ilimitadas possibilidades na variação de quaisquer parâmetros do sistema. Além disso, o modelo pode ser facilmente modificado, com a introdução de novos termos, sem que a programação básica, seja significativamente afetada. A principal desvantagem deste método consiste nas imprecisões numéricas, característica deste

tipo de computador.

É sempre de grande utilidade, preceder os estudos analíticos por uma simulação analógica, devido as inúmeras informações que ela fornece sobre o comportamento do sistema, oferecendo tipos de solução adequadas para as equações de movimento.

5.6 - SUGESTÕES PARA O PROSSEGUIMENTO DA PESQUISA

O estudo que ora se encerra, pode ter desdobramentos em duas linhas principais:

- 1^a) Investigações que visem a um conhecimento mais aprofundado do fenômeno
- 2^a) Utilizando os conhecimentos adquiridos com o estudo não linear, buscar soluções para o problema das grandes amplitudes de oscilação.

Dentro da primeira linha e ainda considerando um feixe de dois condutores, vários estudos podem ser conduzidos com o relaxamento de algumas das hipóteses simplificadoras do modelo matemático. Se isto for feito, poderemos ter modelos matemáticos que levem em conta outros efeitos tais como o acoplamento cruzado entre as forças de suspensão do condutor móvel, o amortecimento estrutural e o movimento do segundo condutor. Evidentemente, a introdução de novos termos no modelo matemático, deve ser feita de maneira gradual, dependendo do nível de informações desejado e do grau de complexidade apresentado pelas soluções dos modelos.

O que parece mais promissor, de imediato, é a introdução do termo que modela o amortecimento estrutural. Com a adição deste termo, o efeito global de dissipação pode ser estu-

dado, bem como a importância relativa que cada um dos dois tipos distintos de amortecimento o mecânico e o aerodinâmico, tem sobre as amplitudes dos ciclos limite.

Um outro passo importante pode ser dado, no sentido de uma visão mais realista do movimento dos condutores no feixe, se o segundo condutor for liberado. Ao se considerar o acoplamento mecânico entre os condutores, o número de graus de liberdade do sistema aumenta e com isto, é esperado um maior grau de dificuldade na solução do modelo. Apesar disto, os métodos de solução podem ser os mesmos apresentados ao longo deste trabalho.

Uma segunda linha de pesquisa, pode estar inteiramente voltada para minimizar os efeitos que as grandes amplitudes de oscilação têm sobre o sistema. Uma das soluções apontadas, inclusive por Cooper²⁶, consiste em uma rotação apropriada do feixe, de modo a mudar a posição do condutor dentro da esteira e conseqüentemente o valor das forças aerodinâmicas que atuam sobre ele. Outras soluções podem ser tentadas. O estudo de absorvedores de vibração ou amortecedores que utilizem diferentes princípios de dissipação de energia. O exemplo mais ilustrativo, é o caso do amortecedor de Stockbridge^{44,45} usado para o caso das vibrações eólicas. Este amortecedor, do tipo pendular, dissipa energia através do amortecimento histerético num segmento de cabo que compõe o pêndulo.

Todas essas sugestões, se referem ao caso mais simples, o feixe de dois condutores, embora estudos posteriores possam vir a demonstrar a validade de muitas generalizações para o caso de feixes múltiplos.

Finalmente, é útil salientar, que os estudos analíticos sendo excelentes guias para os estudos experimentais e vice-versa devem passar pelo teste da verificação experimental . Na fusão entre essas duas formas de estudar o sistema real, está a chave para o progresso do conhecimento.

REFERÊNCIAS

- 1 DOOCY, E.S.; HARD, A.R.; RAWLINS, C.B. and IKEGAMI, R. - "Wind Induced Conductor Motion - Transmission Line Reference Book" - EPRI (Electric Power Research Institute), 1979.
- 2 SMITH, I.P. - "The Aeroelastic Stability of 'Twin' Bundled Conductors" - C.E.R.L. Laboratory Note No. RD/L/N 170-66, abril de 1967.
- 3 SIMPSON, A. - "Stability of Subconductors of Smooth Circular Cross-Section" - Proceedings IEEE, Vol. 117, No. 4, abril de 1970, pp 741-50.
- 4 IKEGAMI, R.; SALUS, W.L. and WATANABE, R.K. - "Structural Analysis, High Voltage Power Transmission Systems" - Boeing Company, Seattle, BPA Contract No. 14-03-1362 N, Novembro de 1971.
- 5 SARKINEN, C.F.; JOHNSON, M.D.; PARKS, G.A.; IKEGAMI, R. and SALUS, W.L. - "Theoretical and Experimental Studies of Wind-Induced Bundle Conductor Motions - Part II"-IEEE Conference Paper C74 3778, 1974.
- 6 DIANA, G. and GIORDANA, F. - "Sulle Vibrazioni di un Cilindro in Scia di un Altro" - Análise del Fenomeno com Modello Analítico" - L'Energia Elettrica, No. 7, 1972, pp. 448-57.
- 7 GIORDANA, F. - "Verifiche Sperimentali Sulla Stabilità di un Cilindro Nella Scia di Un Altro" - L'Energia Elettrica, No. 12, 1973, pp. 735-50.
- 8 KO, R.G. - "Theoretical Investigation for Hydro-Quebec into the Aerodynamic Stability of Bundled Power Line Conductors, Part I: Two-Dimensional Stability Analysis of a Conductor in the Wake of a Fixed Conductor" - NRC (Canada) Laboratory Technical Report LA-122, março de 1973.

- 9 WARDLAW, R.L.; COOPER, K.R.; KO, R.G. and WATTS, J.A.-"Wind Tunnel and Analytical Investigations into the Aeroelastic Behaviour of Bundled Conductors" - IEEE Transactions Paper T74 368-7, 1974.

- 10 SIMPSON, A. and PRICE, S. - "On the Use of "Damped" and "Undamped" Quasi-Static Aerodynamic Models in the Study of Wake-Induced Flütter" - IEEE Conference Paper C 74-378-6, 1974.

- 11 PRICE, S.J. - "Wake-Induced Flütter of Power Transmission Conductors" - Journal of Sound and Vibration, 38(1) , 1975, pp. 125-47.

- 12 TSUI, Y.T. - "Two-Dimensional Stability Analysis of a Circular Conductor in the Wake of Another" - IEEE Paper A 75 576-9, 1975.

- 13 SIMPSON, A and LAWSON, T.V. - "Oscillations of "Twin" Power Transmission Lines" - Royal Aeronautical Society Paper No. 25, Vol. 2, abril de 1968.

- 14 BRZOZOWSKI, V.J. and HAWKS, R.J. - "Wake-Induced Full - Span Instability of Bundle Conductor Transmission Lines" - AIAA Journal, Vol. 14, No. 2, fevereiro de 1979, pp. 179-84.

- 15 KO, R.G. - "Theoretical Investigation for Hydro-Quebec into the Aerodynamic Stability of Bundled Power Line Conductors, Part II: Two-Dimensional Stability for a Bundle of four Conductors" - NRC (Canada) Laboratory Technical Report LA-133, abril de 1974.

- 16 CURAMI, A. and RIVA, R. - "Simulazione del Fenomeno di Subspan su Fascio di Conduttori - Modello Semplificato" - L'Energia Elettrica, No. 7, 1976.

- 17 CURAMI, A.; RIVA, R.; DiGIACOMO, G. and NICOLONI, P. - "Wake Induced Oscillations in Bundle Systems, Part III - Com

- parative Analysis of Various Bundle Configurations" - IEEE Paper A77 219-9, 1977.
- 18 DIANA, G. and GASPARETTO, M. - "Energy Method for Computing the Amplitude of Vibration of Conductor Bundles Due to Wake Effect" - L'Energia Elettrica, No. 8, 1972, pp. 532-9.
 - 19 GIORDANA, F. - "Verifiche Sperimentali Sulla Stabilit  di un Cilindro Nella Scia di Un Altro. Indagine Sui Cicli Limite" - L'Energia Elettrica, N  8, 1974.
 - 20 DIANA, G.; GASPARETTO, M.; DIGIACOMO, G. and NICOLINI, P. - "Analytical Method for Computing Subspan Oscillation, Analytical and Experimental Results" - IEEE Conference Paper C 74 4933, 1974.
 - 21 CLAREN, R.; DIANA, G.; GIORDANA, F. and MASSA, E. - "The Vibrations of Transmission Line Conductor Bundles" - IEEE Transactions Paper T 71 158 PWR, 1971.
 - 22 KO, R.G. and WARDLAW, R.L. - "Three-Dimensional Analysis on the Wind Induced Subspan Oscillations of Bundled Conductors" - IEEE Conference Paper C 74 0600.
 - 23 CURAMI, A.; DIANA, G.; RIVA, R. DIGIACOMO, G. and NICOLINI, P. - "Wake-Induced Oscillations in Bundle Systems, Part I - Finite Element Method, Analytical and Experimental Results" - IEEE Paper A 77 218-1, 1977.
 - 24 MAWKAWA, T. - "Study on Wind Pressure Against ACSR Double Conductor" - Electrical Engineering in Japan, Vol. 84 (2), fevereiro de 1964, pp. 21-8.
 - 25 WARDLAW, R.L.; COOPER, K.R. and SCANLAN, R.H. - "Observations on the Problem of Subspan Oscillation of Bundled Power Conductors" - DME/NAE Quartely Bulletin No. 1973(1), NRC (Canada), abril de 1973.

- 26 COOPER, K.R. - "Wind Tunnel and Theoretical Investigations into the Aerodynamic Stability of Smooth and Stranded Twin Bundled Power Conductors" - NRC (Canada) Laboratory Technical Report LA-115, Janeiro de 1973.
- 27 SIMPSON, A. - "Wake-Induced Flütter of Circular Cylinders : Mechanical Aspects" - The Aeronautical Quartely, Vol. XXII, maio de 1971.
- 28 WATTS, J.A. and KO, R.G. - "A Wind Tunnel Investigation into the Aerodynamic Stability of Bundled Conductors for Hydro-Quebec. Part I: Dynamic Sectional, Model Testing Using Axially Tensioned Spring Suspension" - NRC (Canada) Laboratory Technical Report, LA-102, janeiro de 1973.
- 29 IKEGAMI, R.; SALUS, W.L.; WATANABE, R.K. and ANDREWS, J.S. "Wind Tunnel Study UHV Bundle Conductor" - Final Report BPA Contract 14-03-5248 N, Vols. I e II, The Boeing Company, Seattle, fevereiro de 1976.
- 30 "High-Voltage Transmission Conductor Motion Research" - Final Report EPRI TD-172, Project 119, prepared by Aluminium Company of America, Massena, NY, junho de 1976.
- 31 WARDLAW, R.L. and COOPER, K.R. - "A Wind Tunnel Investigation of the Steady Aerodynamic Forces on Smooth and Stranded Twin Bundled Power Conductors for the Aluminium Company of America" - NRC (Canada) Laboratory Technical Report LA-117, agosto de 1973.
- 32 GIORDANA, F. - "Experimental Determination of the Force Field Acting on a Cylinder in the Wake of Another" - L'Energia Elettrica, No. 3, 1972, pp. 154-61.
- 33 COUNIHAN, J. - "Lift and Drag Measurements on Stranded Cables" - Imperial College (London) Report No. 117, agosto de 1963.

- 34 SIMPSON, A. - "On the Flütter of a Smooth Circular Cylinder in a Wake" - The Aeronautical Quartely, fevereiro de 1971, pp. 25-41.
- 35 NAYFEH, A.H. - "Perturbation Methods" - John Wiley & Sons, 1973.
- 36 NAYFEH, A.H. - "Nonlinear Oscillations" - John Wiley & Sons, 1979.
- 37 KRYLOFF, N. and BOGOLIUBOFF, N. - "Introduction to Non-Linear Mechanics" - Princeton University Press, 1947.
- 38 MANSOUR, W.M. - "Introduction to Nonlinear Systems, Part II: The Quantitative Approach". Notas de Aula.
- 39 ANDRONOW, A.A. and CHAIKIN, C.E. - "Theory of Oscillations", Princeton University Press, 1949.
- 40 BUTENIN, N.V. - "Elements of the Theory of Non-Linear Oscillations" - Blaisdel Publishing Company, 1965.
- 41 OLIVEIRA, A.R.E. e MANSOUR, W.M. - "Vibrações de Sub-Vão em Linhas de Transmissão" - Paper No. C-35, Anais do II Congresso Brasileiro de Energia, Rio, abril de 1981 pp. 1193-1204.
- 42 OLIVEIRA, A.R.E. e MANSOUR, W.M. - "Cálculo das Amplitudes dos Ciclos-Limite nas Oscilações de Sub-vão em Linhas de Transmissão" - Paper No. C-1, Anais do VI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Rio, dezembro de 1981, pp. 1-9.
- 43 OLIVEIRA, A.R.E. and MANSOUR, W.M. - "Nonlinear Analysis and Simulations of Twin Bundle Conductors of Transmission Lines" - Anais do 10º IMACS (International Association for Mathematics and Computers in Simulation), Montreal, agosto de 1982.

- 44 WAGNER, H.; RAMAMURTI, V.; SASTRY, R.V.R. and HARTMAN, K.
- "Dynamics of Stockbridge Dampers" - Journal of Sound
and Vibration, Vol. 30(2), 1973, pp. 207-220.

- 45 MANSOUR, W.M. and TEIXEIRA FILHO, D.R. - "Impact Dampers
with Coulomb Friction" - Journal of Sound and Vibration,
Vol. 33(3), 1974, pp. 247-265.

- 46 MOHAJERY, M. - "Wake-Induced Oscillation of Bundled Conduc-
tors-Two, Three and Four-Conductor Bundles" - EEI T & D
Meeting, San Diego, janeiro de 1976.

APÊNDICE A

REVISÃO DE ALGUNS RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Conforme foi mencionado no item 1.5 (Capítulo I) as forças aerodinâmicas são funções do número de Reynolds, da posição dos condutores dentro da esteira, da inclinação do feixe em relação a velocidade do vento, da rugosidade superficial dos condutores e das condições ambientais.

Especificados os condutores e controladas as condições ambientais (umidade do ar, temperatura, etc.) as outras características que completam a experimentação, são de natureza geométrica ou cinemática. A velocidade do vento e o tipo de escoamento podem ser especificados através do número de Reynolds. A posição relativa entre os condutores no feixe, fica definida por meio de um sistema de coordenadas previamente escolhido. Para o caso de um feixe de dois condutores, onde um deles é mantido fixo (Capítulo II), a origem do sistema de coordenadas, coincide com o condutor fixo.

A posição do condutor móvel, será dada pelo par (X, Y) , ou como fazem alguns pesquisadores, pela distância (d) entre os condutores e o ângulo de ataque (α) . O par (d, α) tem o mesmo significado do sistema polar associado a $X - Y$.

Na referência⁴⁶, foi estudado o efeito das condições ambientais sobre os coeficientes C_L e C_D . A Figura 1A, mostra os resultados obtidos.

VELOCIDADE DO VENTO — 30 mph
 ÂNGULO DO FEIXE — 0°
 SEPARAÇÃO HORIZONTAL — 18''
 DIÂMETRO DO CONDUTOR — 1.602''

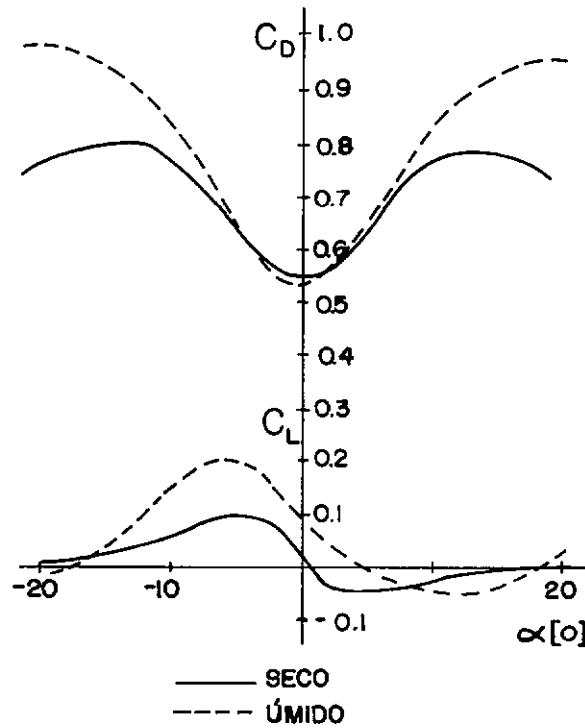


FIGURA 1A - INFLUÊNCIA DA UMIDADE NAS FORÇAS AERODINÂMICAS

A Figura 2A, mostra os efeitos de interferência sobre C_L e C_D , quando o número de condutores no feixe é aumentado.

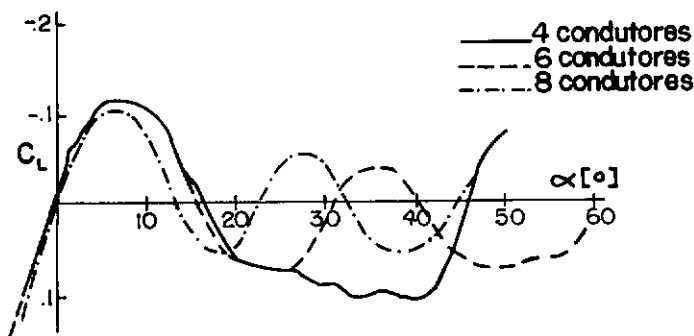


FIGURA 2A - EFEITOS DE INTERFERÊNCIA EM CABOS PARA FEIXES MÚLTIPLOS

A Figura 3A, mostra os resultados obtidos por Simpson³⁴, para os coeficientes C_L e C_D .

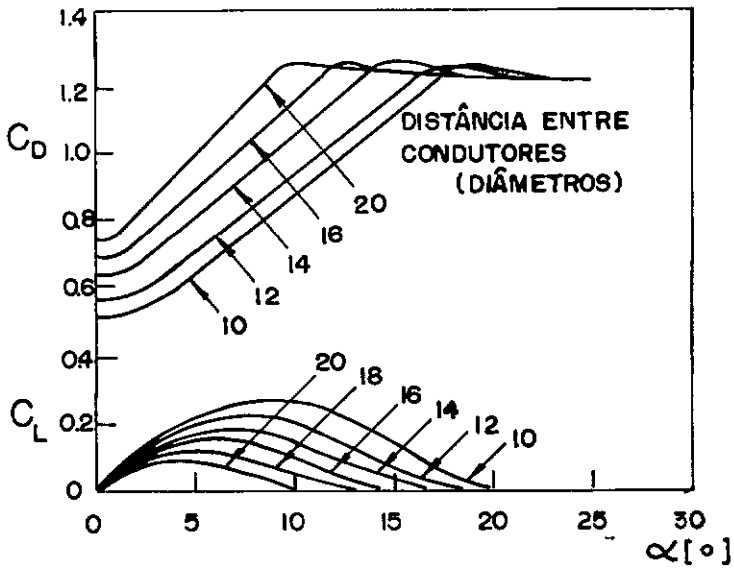


FIGURA 3A - COEFICIENTES DE SUSTENTAÇÃO E DE ARRASTE

A Figura 4A, mostra contornos de estabilidade para condutores lisos, obtidos pela referência 25.

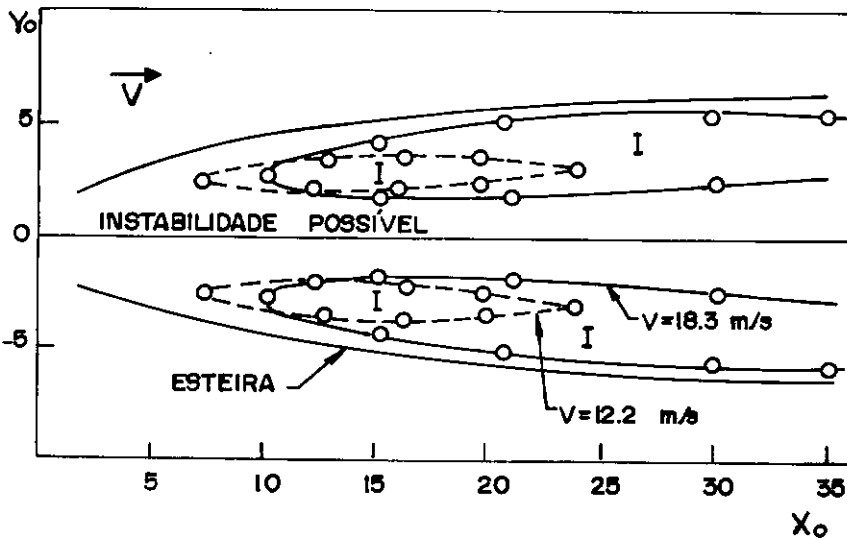


FIGURA 4A - CONTORNOS DE ESTABILIDADE PARA CONDUTORES LISOS

A Figura 5A, mostra contornos de estabilidade para cabos, obtidos pela referência 25.

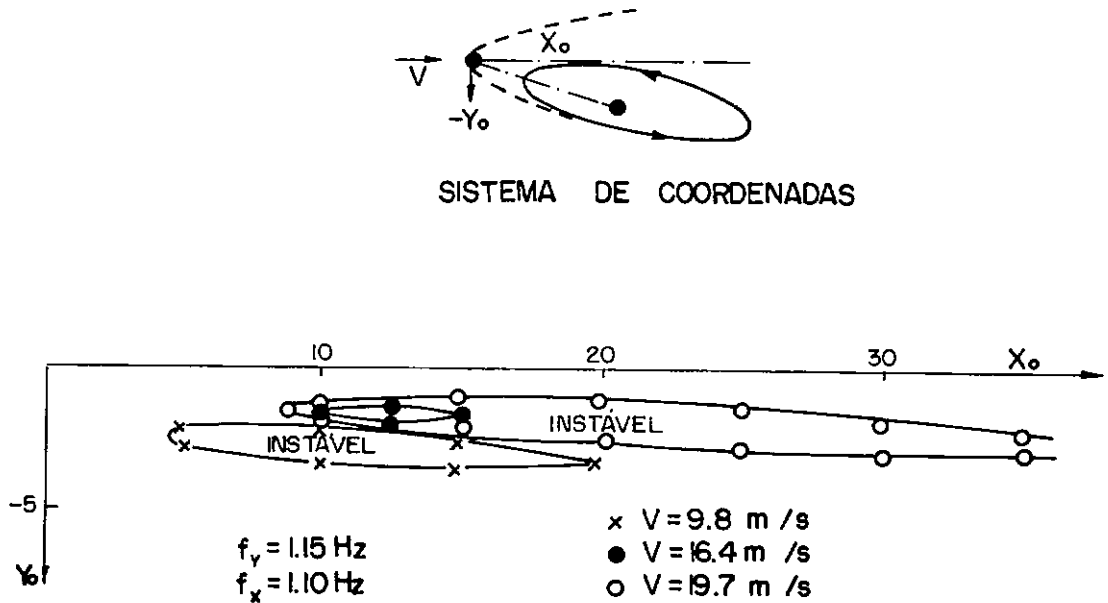


FIGURA 5A - CONTORNOS DE ESTABILIDADE PARA CABOS

Os coeficientes C_L e C_D , são funções da posição do condutor dentro da esteira. C_L é sempre antissimétrica, enquanto C_D é simétrico em relação a α . Pequenas variações podem ser observadas, dependendo do tipo de condutor ensaiado e das condições em que os ensaios foram realizados.

Os resultados apresentados neste apêndice, podem ainda ser comparados com os resultados obtidos por Cooper (Apêndice B), os quais serviram de ponto de partida para o presente trabalho.

Em relação aos contornos de estabilidade, podemos notar as diferenças existentes, se os condutores são lisos ou possuem enrolamentos (cabos). O enrolamento do cabo modifica o caráter do escoamento, mudando o aspecto das funções C_L e C_D .

Outros resultados experimentais, para diversos ti

pos de condutores e variadas configurações de feixe podem ser vistos na referência 1.

Na Figura 6A, vemos os resultados experimentais obtidos por Cooper²⁶, para as amplitudes máximas do condutor móvel. Ao compararmos esses resultados com aqueles que foram obtidos analiticamente ao longo do Capítulo III, vemos que eles apresentam uma boa correlação entre si.

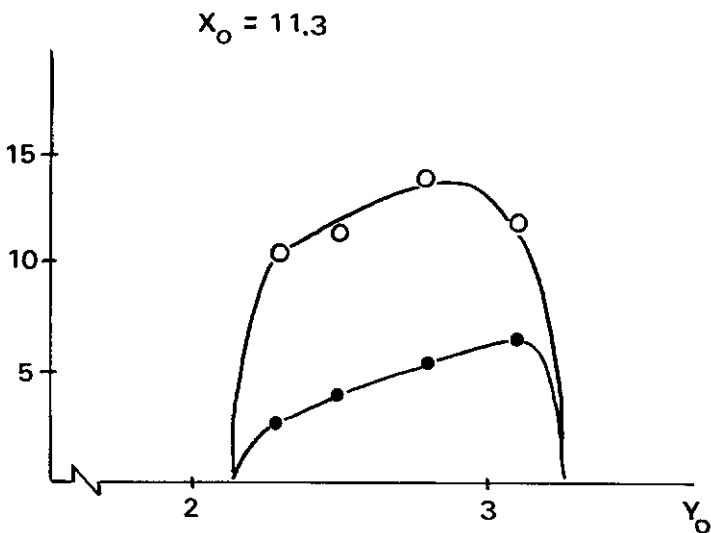
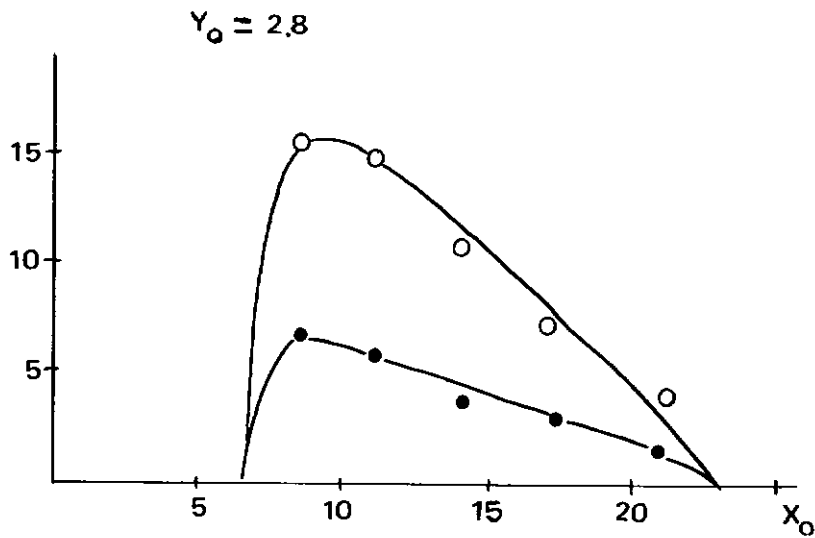


FIGURA 6A

o vertical
● horizontal

$V \approx 40 \text{ ft/s}$

APÊNDICE B

AJUSTAGEM DAS CURVAS C_L E C_D

A Figura 1B, mostra os resultados experimentais obtidos por Cooper²⁶ para as distribuições de C_L e C_D , dentro da esteira do condutor fixo. A região estudada compreende todo o intervalo

$$0 < \frac{X}{d} < 50 \quad ; \quad \frac{Y}{d} < 8$$

Os valores de C_L e C_D , resultaram de medições estáticas em tunel de vento, onde um dos condutores foi mantido fixo, de conformidade com as hipóteses b) e c) mencionadas no Capítulo II. Os dois condutores ensaiados e os suportes do condutor móvel tinham as seguintes características:

$$m = 3,13 \text{ kg} \quad ; \quad l = 0,91 \text{ m} \quad ; \quad d = 0,04 \text{ m}$$

$$\omega_x = 6,90 \text{ rd/s} \quad ; \quad \omega_y = 7,22 \text{ rd/s}$$

A partir da distribuição dos pontos obtidos experimentalmente, é possível ajustar funções

$$C_L = C_L \left(\frac{X}{d}, \frac{Y}{d} \right) \quad \text{e} \quad C_D = C_D \left(\frac{X}{d}, \frac{Y}{d} \right)$$

desde que um modelo matemático adequado a tendência seguida pelos pontos, seja encontrado. Feito isto, as equações de movimento do condutor móvel podem ser estabelecidas e os estudos analíticos implementados.

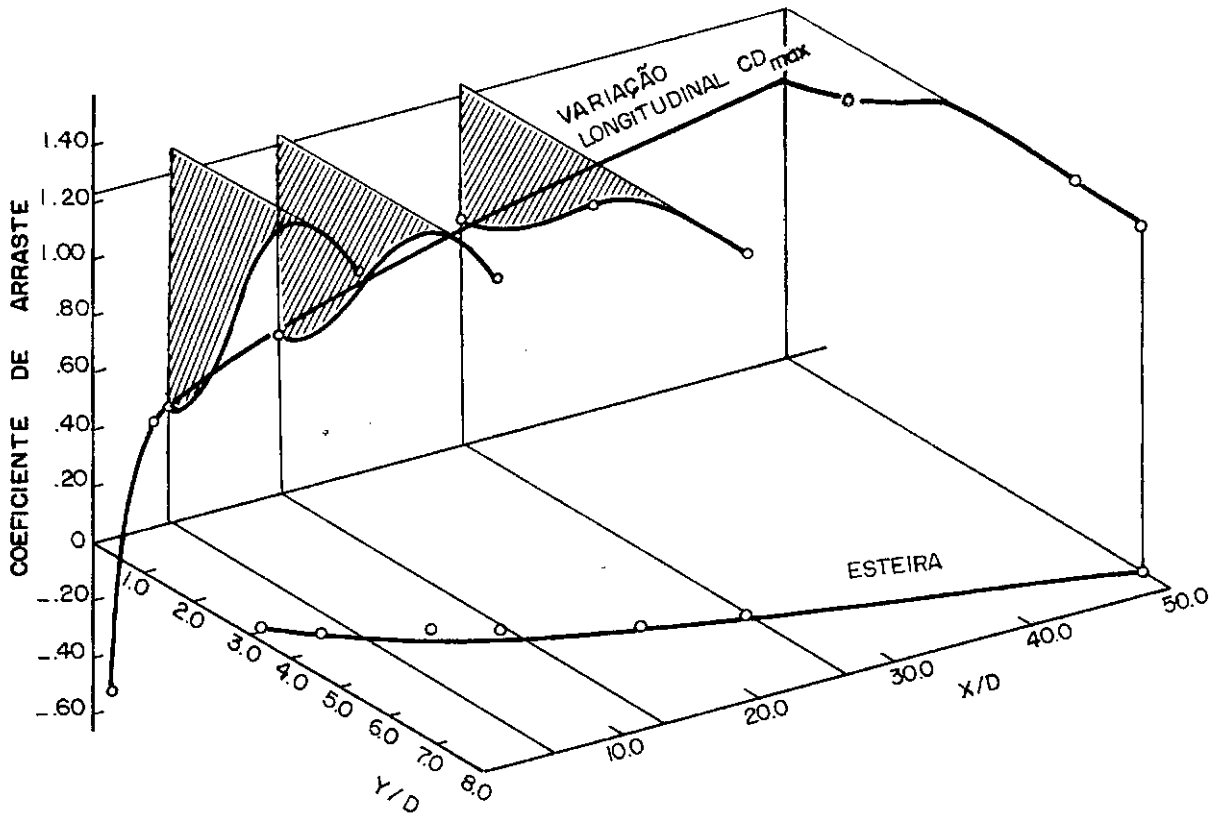
Para o caso específico de condutores usados nas linhas de transmissão, as distâncias relativas entre eles, estão sempre compreendidas entre 10 a 30 diâmetros do condutor. Isto permite limitar a região onde o movimento ocorre, ao intervalo supra citado, tornando mais simples o modelo matemático para C_L e C_D e conseqüentemente o estudo analítico a partir das equações de movimento.

O procedimento descrito, foi adotado ao presente trabalho e a região em estudo ficou restrita ao intervalo:

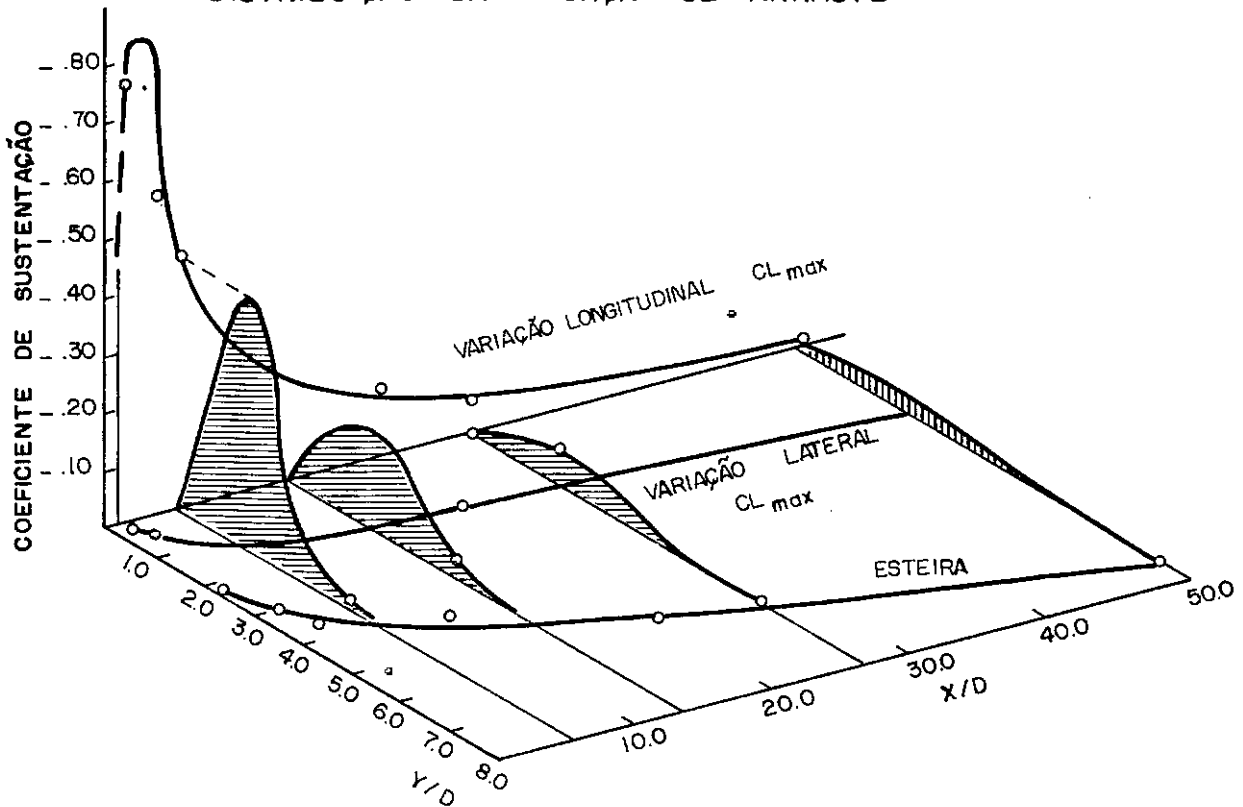
$$10 < \frac{X}{d} < 30 \quad ; \quad \frac{Y}{d} < 4$$

Usando o método dos mínimos quadrados o modelo matemático representado pelas equações (2.10), demonstrou ser o que melhor descrevia a tendência seguida pelos pontos medidos.

As Figuras 2B à 6B mostram as curvas ajustadas às distribuições dos pontos obtidos experimentalmente.



DISTRIBUIÇÃO DA FORÇA DE ARRASTE



DISTRIBUIÇÃO DA FORÇA DE SUSTENTAÇÃO

FIGURA 1B

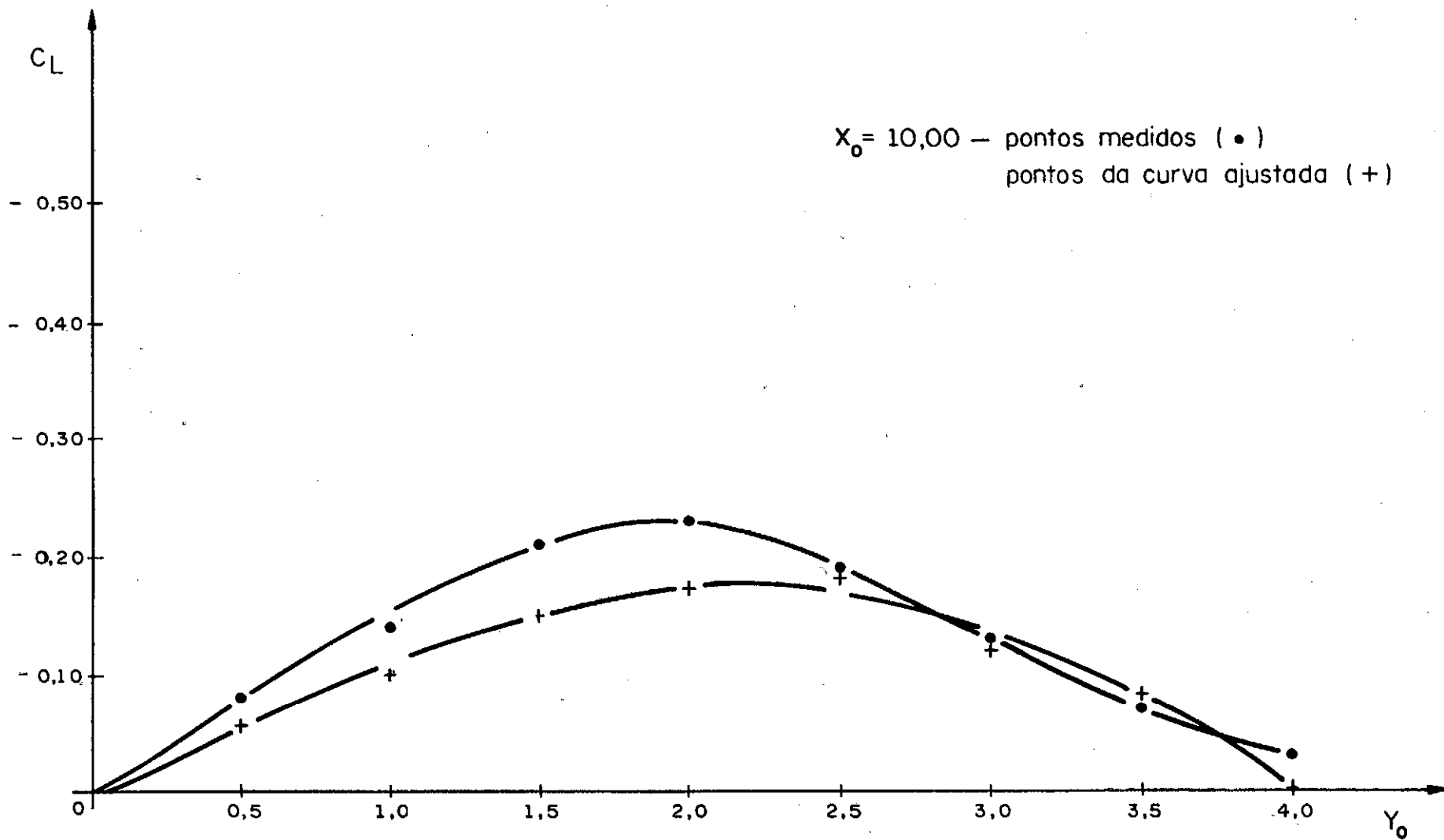


FIGURA 2B

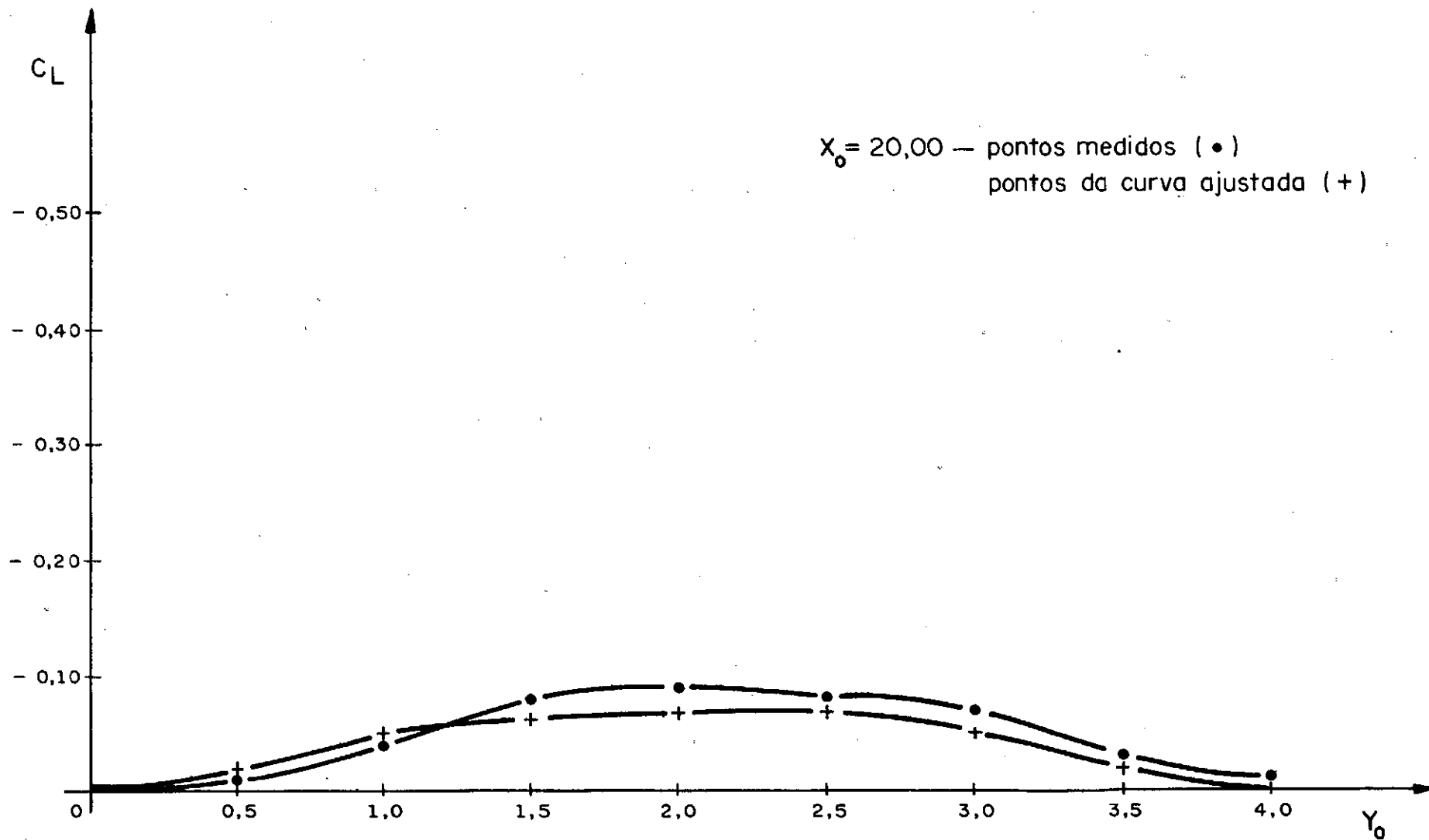


FIGURA 3B

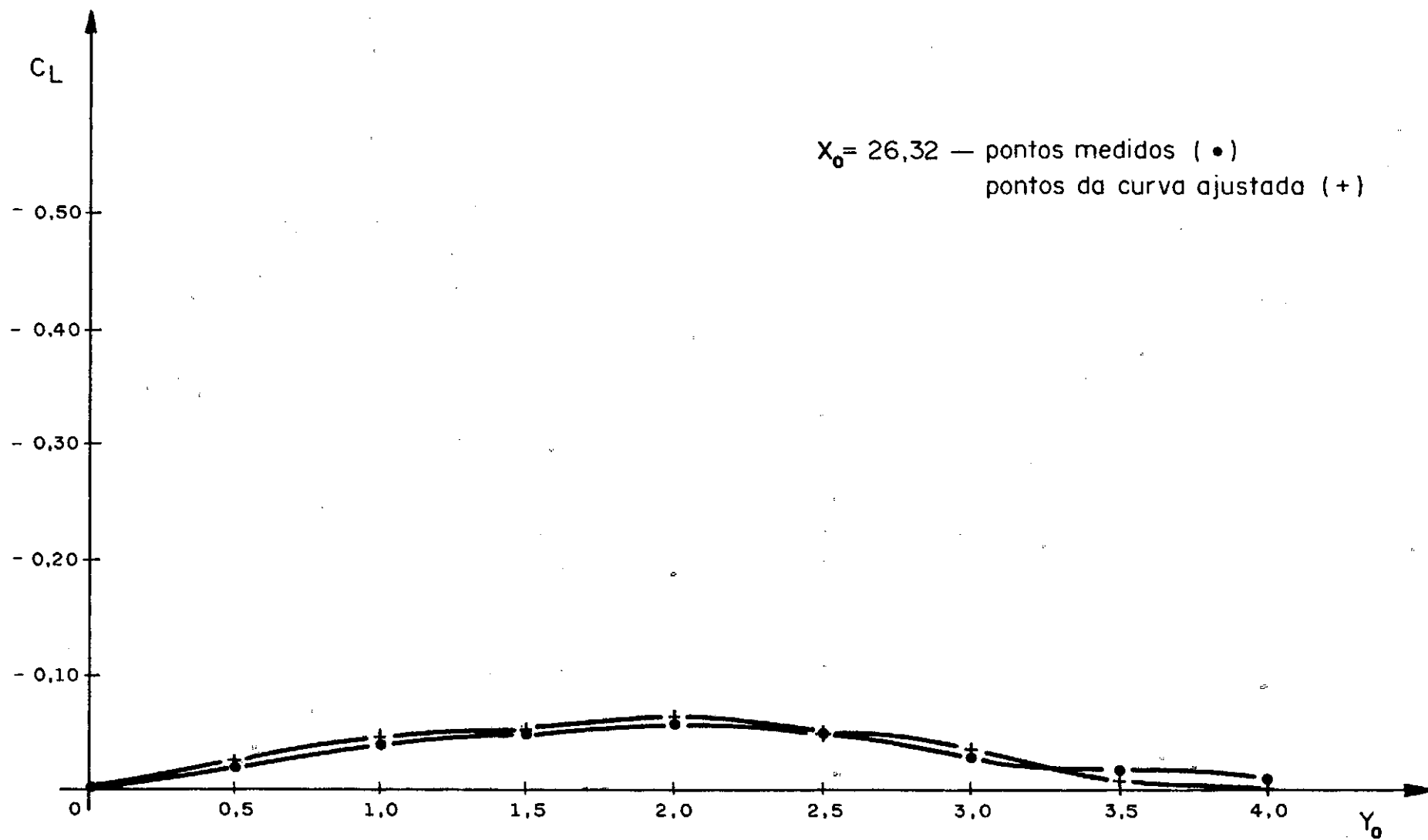


FIGURA 4B

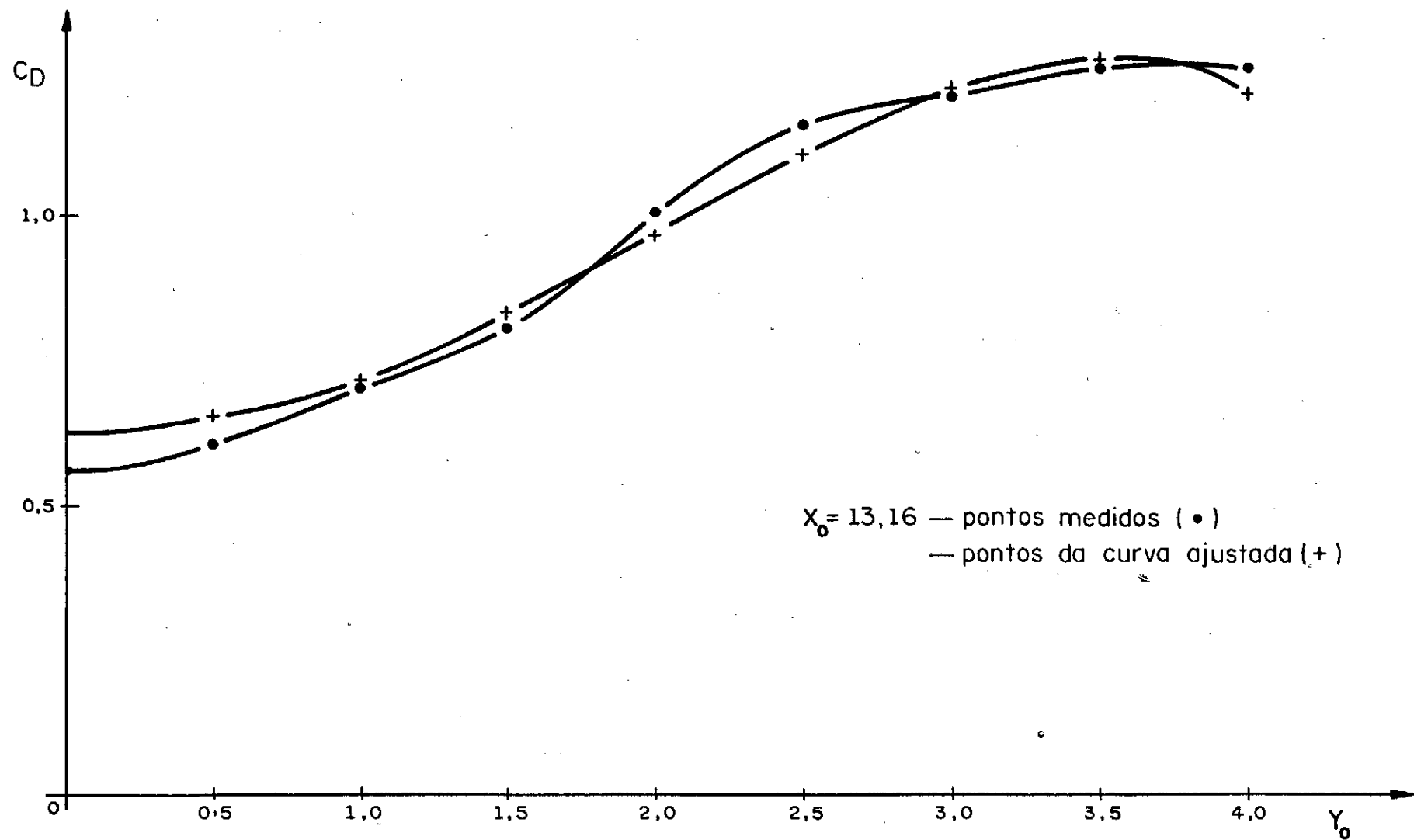


FIGURA 5B

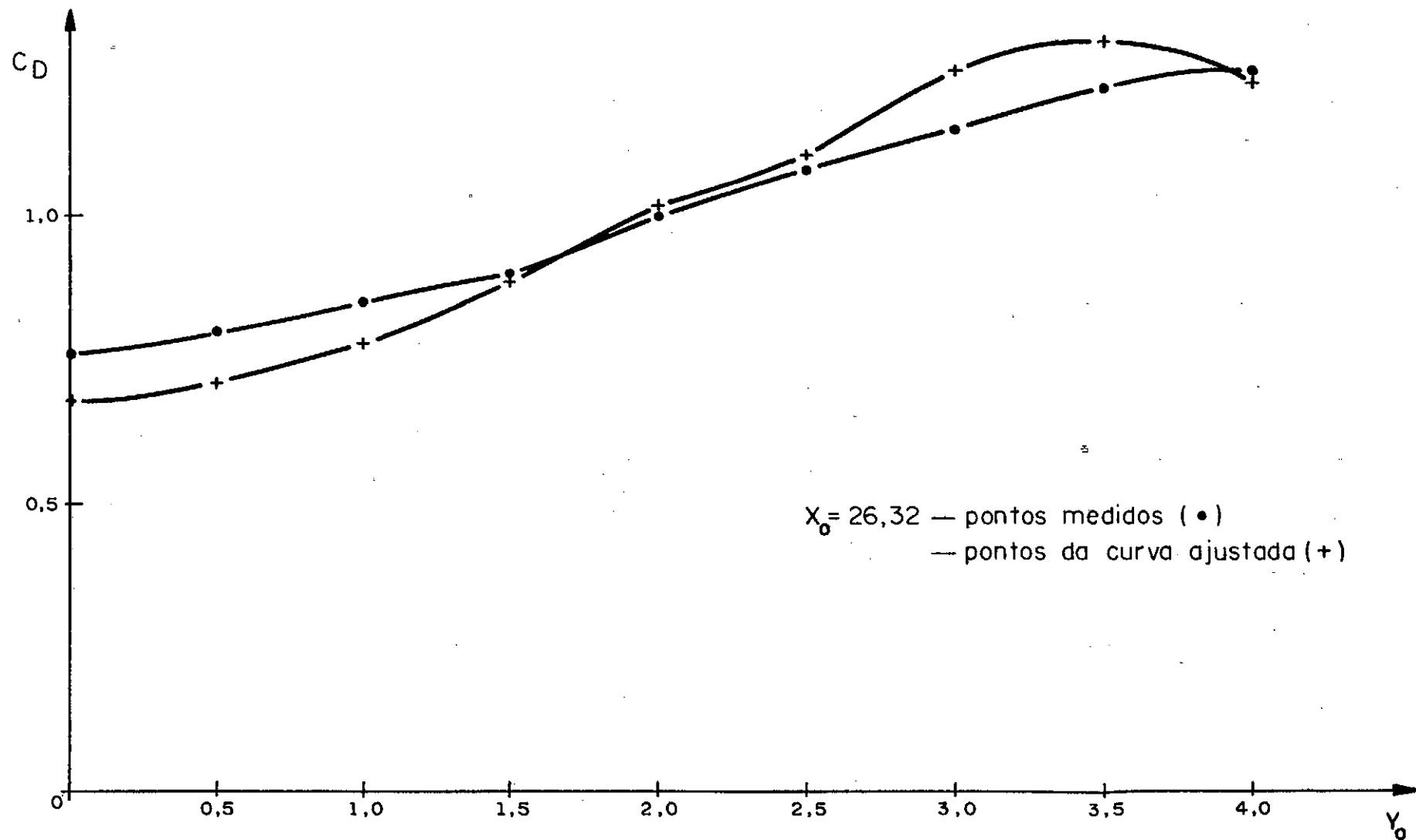


FIGURA 6B

APÊNDICE C

MÉTODO DIRETO PARA CALCULAR AS VELOCIDADES CRÍTICAS

$$\Omega_n^4 + \left[\frac{r_2 W^2 + r_3 W - 2r_0}{r_0 + r_1 W} \right] \Omega_n^2 + \left[\frac{r_4 W^3 + r_5 W^2 - (r_1 + r_3) W + r_0}{r_0 + r_1 W} \right] = 0$$

para

$$r_0 + r_1 W \neq 0$$

A equação (2.22a) pode ser escrita na forma:

$$\Omega_n^4 + [r_6 W - r_7] \Omega_n^2 + [r_8 W^2 - r_9 W + r_{10}] = 0$$

onde

$$\left. \begin{aligned} r_0 &= b_0 k^2 ; r_1 = a_0 b_2 - b_0 a_2 ; r_2 = 2 b_1 r_1 + k^2 r_{11} r_{12} \\ r_3 &= 2 b_1 r_0 - 2 r_1 + a_0 k^2 r_{12} ; r_4 = r_1 r_{13} + b_1 r_2 \\ r_5 &= r_0 r_{13} + 2 b_1 r_1 - r_2 + b_1 r_3 ; r_6 = b_1 + a_2 \\ r_7 &= 1 + k^2 ; r_8 = a_2 b_1 - a_1 b_2 \\ r_9 &= a_2 + k^2 b_1 ; r_{10} = k^2 \\ r_{11} &= b_0 a_1 - a_0 b_1 ; r_{12} = a_1 - 2 b_2 \\ r_{13} &= 2 a_1 b_1 - b_1^2 \end{aligned} \right\} \quad (C.1)$$

Eliminando Ω entre os polinômios, obtemos os seguintes polinômios em W .

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^6 \beta_{n1} W^n &= 0 \\ \sum_{n=0}^7 \beta_{n2} W^n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (C.2)$$

onde as seguintes quantidades são introduzidas para definir os coeficientes β .

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= r_1 r_6 - r_2 ; \sigma_2 = r_0 r_6 - r_1 r_7 - r_3 ; \sigma_3 = r_0 (2 - r_7) \\ \sigma_4 &= r_4 - r_1 r_8 ; \sigma_5 = r_1 r_9 + r_5 - r_0 r_8 \\ \sigma_6 &= r_0 r_9 - r_1 - r_3 - r_1 r_{10} ; \sigma_7 = r_0 (1 - r_{10}) \end{aligned} \right\} \quad (C.3)$$

juntamente com

$$\left. \begin{aligned} f_{41} &= \sigma_1^2 ; f_{31} = 2 \sigma_1 \sigma_2 ; f_{21} = \sigma_2^2 + 2 \sigma_1 \sigma_3 \\ f_{11} &= 2 \sigma_2 \sigma_3 ; f_{01} = \sigma_3^2 \\ f_{52} &= \sigma_1 \sigma_4 ; f_{42} = \sigma_1 \sigma_5 + \sigma_2 \sigma_4 \\ f_{32} &= \sigma_1 \sigma_6 + \sigma_2 \sigma_5 + \sigma_3 \sigma_4 ; f_{22} = \sigma_1 \sigma_7 + \sigma_2 \sigma_6 + \sigma_3 \sigma_5 \\ f_{12} &= \sigma_2 \sigma_7 + \sigma_3 \sigma_6 ; f_{02} = \sigma_3 \sigma_7 \\ f_{63} &= \sigma_4^2 ; f_{53} = 2 \sigma_4 \sigma_5 ; f_{43} = \sigma_5^2 + 2 \sigma_4 \sigma_6 \\ f_{33} &= 2 \sigma_5 \sigma_6 + 2 \sigma_4 \sigma_7 ; f_{23} = \sigma_6^2 + 2 \sigma_5 \sigma_7 \\ f_{13} &= 2 \sigma_6 \sigma_7 ; f_{03} = \sigma_7^2 \end{aligned} \right\} \quad (C.4)$$

Os coeficientes β em (C.2) são definidos por:

$$\left. \begin{aligned}
 \beta_{01} &= r_{10} f_{01} - r_7 f_{02} + f_{03} \\
 \beta_{11} &= r_{10} f_{11} - r_7 f_{12} + f_{13} - r_9 f_{01} + r_6 f_{02} \\
 \beta_{21} &= r_{10} f_{21} - r_7 f_{22} + f_{23} - r_9 f_{11} + r_6 f_{12} + r_8 f_{01} \\
 \beta_{31} &= r_{10} f_{31} - r_7 f_{32} + f_{33} - r_9 f_{21} + r_6 f_{22} + r_8 f_{11} \\
 \beta_{41} &= r_{10} f_{41} - r_7 f_{42} + f_{43} - r_9 f_{31} + r_6 f_{32} + r_8 f_{21} \\
 \beta_{51} &= - r_7 f_{52} + f_{53} - r_9 f_{41} + r_6 f_{42} + r_8 f_{31} \\
 \beta_{61} &= f_{63} + r_6 f_{52} + r_8 f_{41}
 \end{aligned} \right\} \quad (C.5)$$

e

$$\beta_{02} = r_0 (f_{01} - 2 f_{02} + f_{03})$$

$$\beta_{12} = r_0 (f_{11} - 2 f_{12} + f_{13}) - (r_1 + r_3) f_{01} + r_3 f_{02} + r_1 f_{03}$$

$$\beta_{22} = r_0 (f_{21} - 2 f_{22} + f_{23}) - (r_1 + r_3) f_{11} + r_3 f_{12} + r_1 f_{13} + r_5 f_{01} + r_2 f_{02}$$

$$\beta_{32} = r_0 (f_{31} - 2 f_{32} + f_{33}) - (r_1 + r_3) f_{21} + r_3 f_{22} + r_1 f_{23} + r_5 f_{11} + r_2 f_{12} + r_4 f_{01}$$

$$\beta_{42} = r_0 (f_{41} - 2 f_{42} + f_{43}) - (r_1 + r_3) f_{31} + r_3 f_{32} + r_1 f_{33} + r_5 f_{21} + r_2 f_{22} + r_4 f_{11}$$

$$\beta_{52} = r_0 (-2 f_{52} + f_{53}) - (r_1 + r_3) f_{41} + r_3 f_{42} + r_1 f_{43} + r_5 f_{31} + r_2 f_{32} + r_4 f_{21}$$

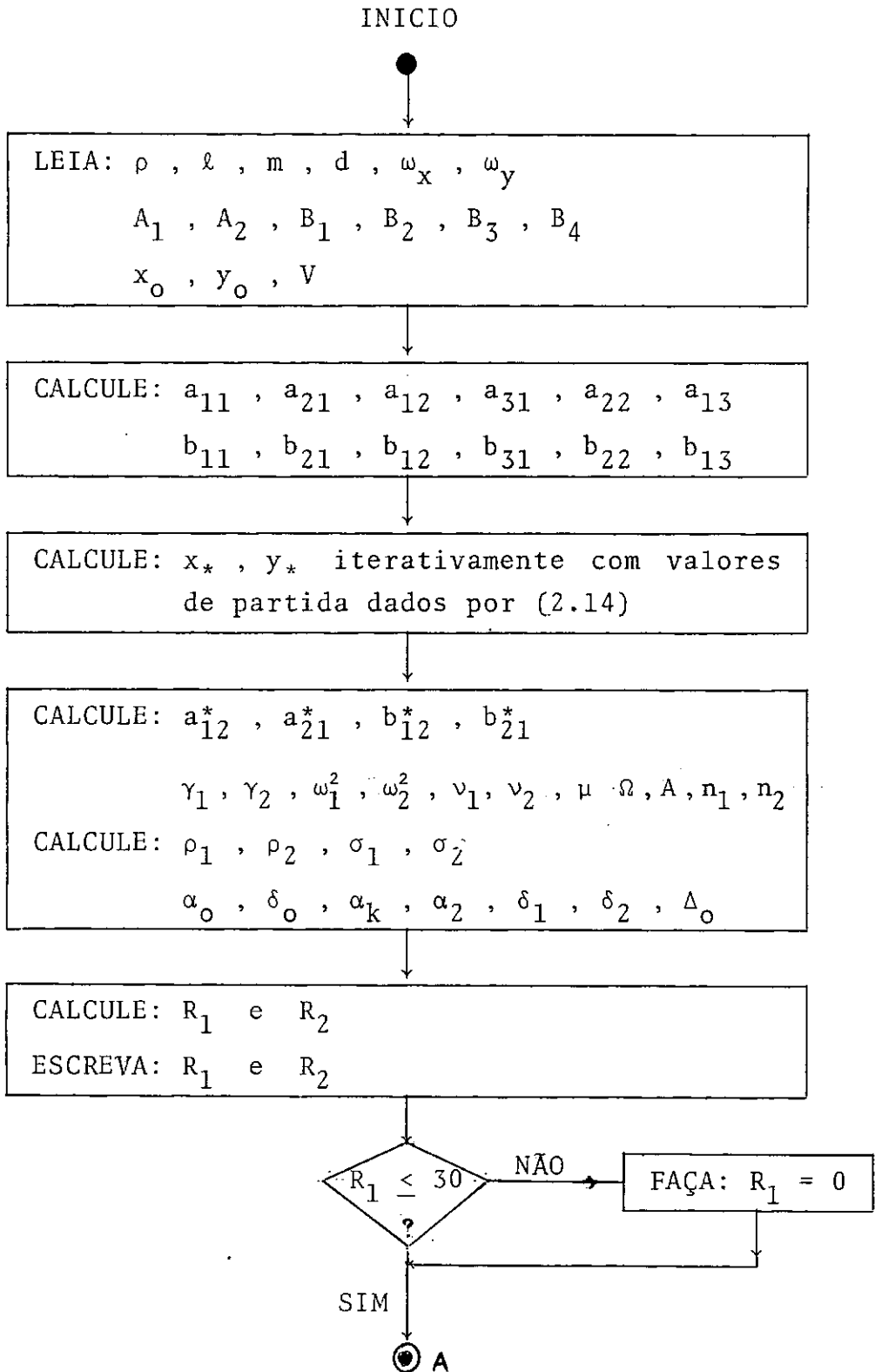
$$\beta_{62} = r_0 f_{63} + r_3 f_{52} + r_1 f_{53} + r_5 f_{41} + r_2 f_{42} + r_4 f_{31}$$

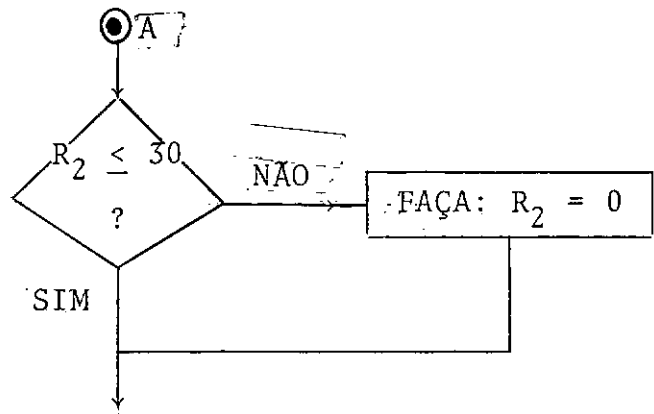
$$\beta_{72} = r_1 f_{63} + r_2 f_{52} + r_4 f_{41} \tag{C.6}$$

As raízes dos polinômios (C.2) podem ser calculadas, para a faixa de interesse da velocidade do vento, usando as sequências de Sturm e o método das bissecções.

APÊNDICE D

FLUXOGRAMA DOS PROGRAMAS PRINCIPAIS

a) MÉTODO DE KRYLOV E BOGOLIUBOV



CALCULE: r_{11} , r_{12} , r_{21} , r_{22}

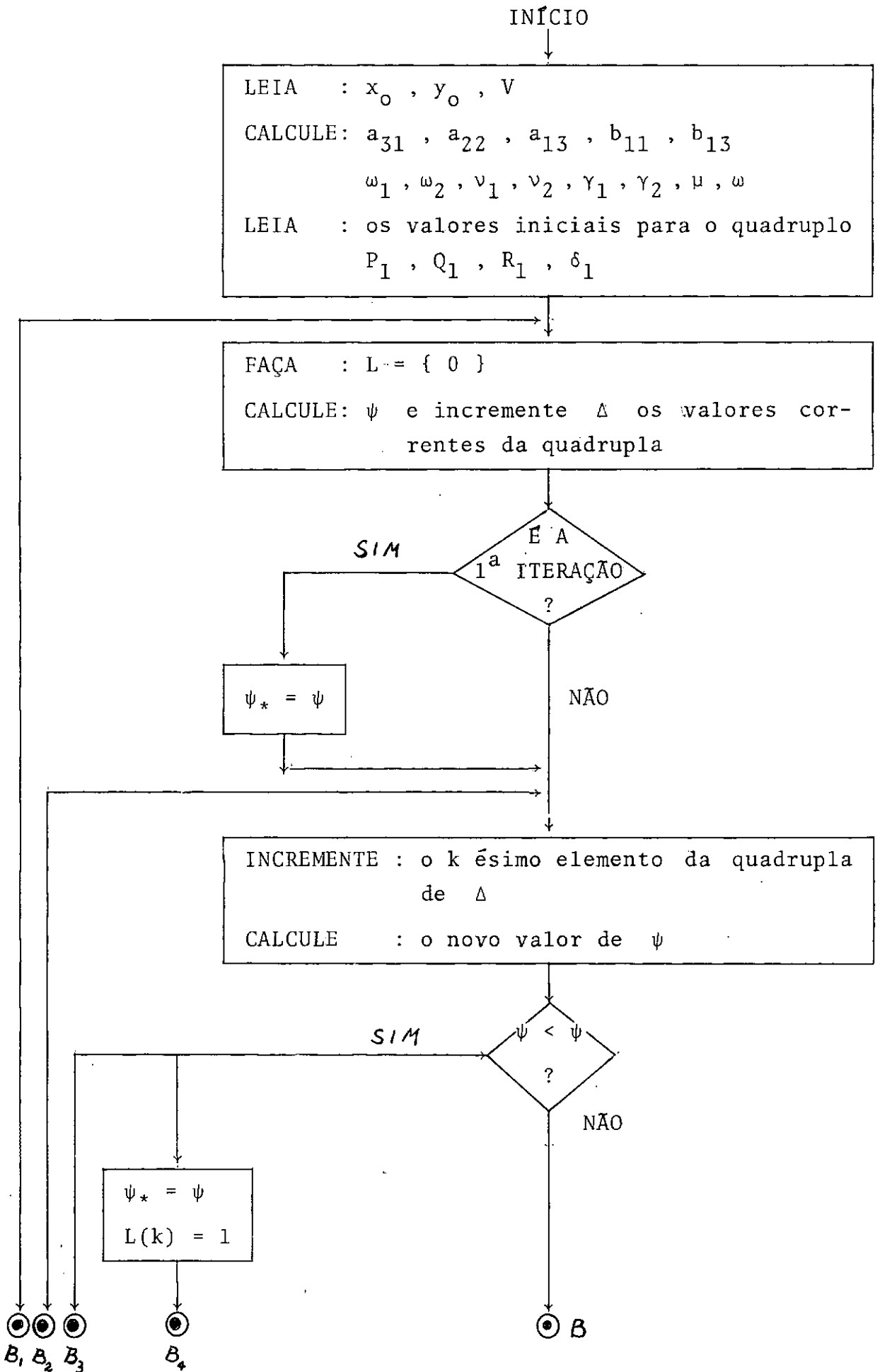
CALCULE: raízes do polinômio

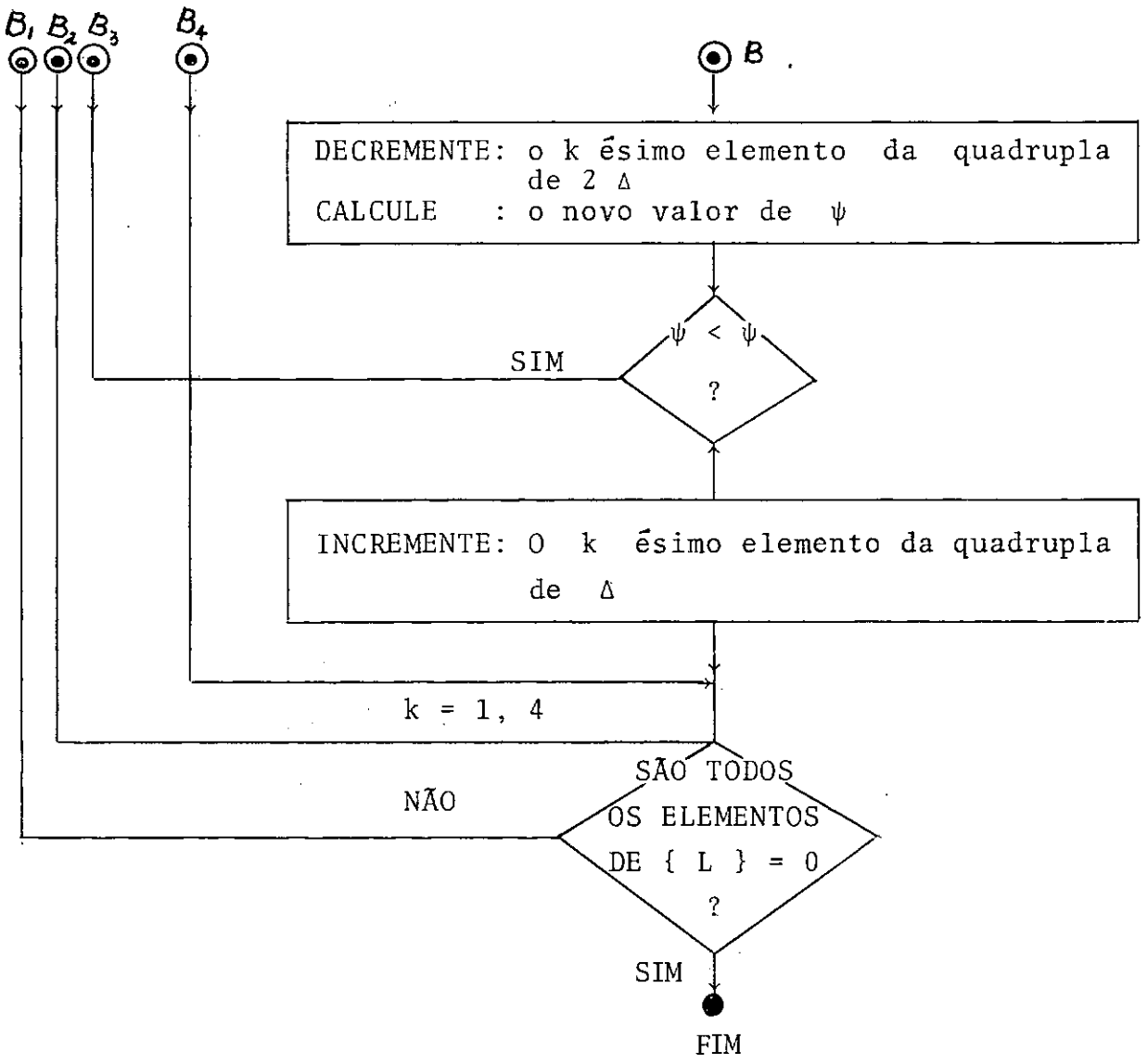
$$\lambda^2 - A(R_{11} + r_{22}) \lambda + A^2 (r_{11} r_{22} - r_{12} r_{21}) = 0$$

ESCREVA: λ_1 e λ_2

FIM

b) MÉTODO DO BALANÇO HARMÔNICO





SIMBOLOGIA

A_i , B_i	- coeficientes das curvas ajustadas para C_L e C_D
A_1^* , A_2^*	- amplitudes de movimento (primeira aproximação)
a_i , b_i	- coeficientes das expansões em série para C_L e C_D (aprox. linear)
a_{ij} , b_{ij}	- coeficientes das expansões em série para C_L e C_D (aprox. quadrática)
C_L , C_D	- coeficientes de sustentação e de arraste baseados em V
C_L^* , C_D^*	- coeficientes de sustentação e de arraste baseados em ηV
\bar{C}_L , \bar{C}_D	- coeficientes de sustentação e de arraste e na simulação analógica
D_0 , D_1	- operadores diferenciais
d	- diâmetro do condutor móvel (m)
F_L , F_D	- forças de sustentação e de arraste (N)
F_x , F_y	- componentes das forças de sustentação e de arraste (N)
g_1 , g_2	- funções não-lineares do modelo não linear cúbico
K_{xx} , K_{yy}	- rigidez horizontal e vertical do sistema de suspensão (N/m)
$k = \frac{\omega_y}{\omega_x}$	- razão entre as frequências naturais
ℓ	- comprimento do condutor móvel (m)
m	- massa do condutor móvel (kg)
P_1 , P_2	- amplitudes de movimento (segunda aproximação)
$(p_1)_s$, $(p_2)_s$	- amplitudes dos ciclos limite para o caso ressonante
R_1 , R_2	- amplitudes dos ciclos limite para o caso não ressonante